YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASINDA GALERKİN YAKLAŞIMI

Dr. Birkan DURAK
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

ÖZET

Mühendislikte ve fizikte karşılan birçok olay yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Mühendislikteki kullanılan çoğu denklem sabit katsayılı ve doğrusaldır. Bu denklemler için çeşitli analitik yöntemler geliştirilerek kullanılmaktadır. Değişken katsayılı veya doğrusal olmayan denklemler için literatürde doğrusal denklemlerdeki kadar fazla çözüm yöntemi mevcut değildir. Eğer denklem lineer değilse, bilinen çözüm teknikleri uygulanmaya başlanmadan önce yarı veya tam lineerleştirme varsayımları yapılır.

Bu çalışmada incelenen problemler için bazı dönüşümler veya lineerleştirme yapılmadan doğrudan bir yaklaşık çözüm tekniği geliştirilmiştir. Yaklaşık çözümler polinomlarla bulunabilmiştir. Galerkin yöntemiyle sekizinci mertebeden doğrusal ve doğrusal olmayan iki tane sınır değer probleminin yaklaşık çözümü bulunmuştur. Literatürden seçilen bu problemler değişken katsayılıdır. Doğrusal olmayan problem homojen iken doğrusal olan problem homojen değildir.

Galerkin yöntemi, yaklaşık çözümde polinom kullanma avantajının yanı sıra, daha yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünü basit integrasyon hesaplamalarıyla bir denklem sisteminin çözümüne indirgeme şansı verir. Yöntemin diferansiyel denklemlere uygulanması sırasında oluşan denklemlerin çözümü, yaklaşık çözümün katsayılarını verir. Doğrusal olmayan problemde bu katsayıların her biri birden fazla gerçek veya karmaşık değerler almaktadır. Bu değerlerden reel olanların en küçükleri seçilirse yaklaşık çözümler daha uygun olarak bulunabilmektedir.

Bu yöntem, daha sonraki çalışmalarda çeşitli yüksek mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanabileceği gibi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünü, integral veya integrodiferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için de kullanılabilir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Denklemler, Galerkin Yöntemi, Sayısal Çözüm

GALERKİN APPROACH TO FINDING APPROXIMATE SOLUTIONS OF HIGH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

In engineering and physics, many phenomena encountered are expressed in high order ordinary differential equations. Most equations used in engineering are constant coefficients and linear. Various analytical methods are developed and used for these equations. For equations with variable coefficients or nonlinear equations, there are not as many solution methods available as for linear equations in the literature. If the equation is nonlinear, half or full linearization assumptions are made before known solution techniques are applied. For the problems examined in this study, a direct approximation technique has been developed without some transformations or linearization. The approximate solutions can be found with polynomials. Solutions of two eighth order linear and nonlinear boundary value problems were found by Galerkin method. These problems selected from the literature have variable coefficients. While the nonlinear problem is homogeneous, the linear problem is not homogeneous.

Galerkin method, besides the advantage of using polynomials in approximate solution, gives the chance to reduce the solution of a high order differential equation to the solution of a system of equations with simple integration calculations. The solution of the equations formed during the application of the method to the differential equations gives the coefficients of the approximate solution. In the nonlinear problem, each of these coefficients takes more than one real or complex values. If the smallest of the real values is selected, approximate solutions can be found more appropriately.

This method can be applied to various high order differential equations in further studies, as well as to find soluiton of differential equation systems, approximate solutions of integral or integrodifferential equations.

Keywords: Differential Equations, Galerkin Method, Numerical Solution

GİRİŞ

Birinci mertebeden diferansiyel denklemler, bir integral çarpanı ve başka teknikler kullanılarak sistematik bir yaklaşımla her zaman çözülebilirler. İntegral alma işlemi yapılabildiği sürece denklemin katsayılarının sabit veya değişken olması çözümü bulmayı zorlaştırmaz. İkinci veya daha yüksek mertebeden denklemlerin çözümü için aynı şey söylenemez. Çoğu mühendislik probleminde sabit katsayılı ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerle karşılaşılır (Engin ve Çengel, 2008). Özellikle ikinci ve daha yüksek mertebeli değişken katsayılı olan diferansiyel denklemler için genel bir çözüm yolu yoktur. Bu

denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak amacıyla en kolay uygulanabilen yöntem seri yöntemidir. İkinci mertebeden lineer ve homojen denklemlerle mekanik, elektrodinamik, ısı ve kuantum mekaniği vb. bilim dallarında karşılaşılır (Karaoğlu, 2007). Değişken katsayılı denklemlerin seri yöntemi ile çözümleri bulunmaya çalışılırken bazı polinomlara ulaşılmıştır. Bunlara Legendre, Bessel, Lauguerre, Hermite polinomları örnek olarak verilebilir. Bu polinomlar ilerleyen çalışmalarda bazı diferansiyel veya integral denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılmıştır.

Dördüncü mertebeden denklemlerin çözümü için Momani ve Noor (2007) çalışmalarında Differential Transform Metodu (DTM), Adomian Decomposition Metodu (ADM), Homotopy Perturbation Metodu olmak üzere üç farklı yönteme yer vermişlerdir. Beşinci mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini bulmak için Wazwaz (2001) ayrıştırma (decomposition) metodunu uygularken, Cağlar vd. (1999) tarafından ise 6. derece B-spline yaklaşımı yöntemi uygulanmıştır. Bu diferansiyel denklemlerin çözümünde DTM, Ertürk ve Momani (2008) tarafından kullanılmıştır. Altı ve daha yüksek mertebeden denklemlerin çözümünde DTM'yi kullanmayı Hassan ve Ertürk (2009) tercih etmiştir. Ogunrinde ve Ojo (2018) tarafından yedi ve sekizinci merteben denklemlere DTM uygulanmıştır.

MATERYAL VE METOT

D diferansiyel operatörü göstermek, a ve b birer reel sayı olmak üzere bir sınır değer problemi

$$D[y(x)] = f(x)$$
$$y(x_1) = a \qquad (1)$$
$$y(x_2) = b$$

olarak yazılabilir. Bu denklemin yaklaşık çözümü $\tilde{y}(x)$ olsun. Bu çözüm diferansiyel denkleme yazılırsa çözümün gerçek değeri ile yaklaşık değeri arasındaki fark aşağıdaki gibi olacaktır.

$$E(x) = D[\tilde{y}(x)] - f(x) \neq 0 \qquad (2)$$

Buradaki hata terimi olan $E(x)$ literatürde residual (kalan/kalıntı) olarak adlandırılır ve $R(x)$ simgesiyle gösterilir. Bu kalan, ağırlık fonksiyonu adı verilen bir fonksiyonla çarpılıp sınırlar olan $x_1 = a$ ve $x_2 = b$ deki sınırlarda bu çarpımı integre edilerek sıfıra eşitleyerek C_i katsayıları bulunabilir.

$$\int_a^b R(x) W_i(x)\, dx = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, N \qquad (3)$$

Bir probleme Galerkin yöntemi uygulanmak istenirse bu integralde ağırlık fonksiyonu için yaklaşık çözümün C_i katsayılarına göre kısmi türevleri yazılmalıdır. Böylece

$$\int_a^b R(x) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial C_i}\, dx = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, N \qquad (4)$$

olur. Burada C_i katsayıları, diferansiyel denklemin sınır şartlarını sağlayan deneme (taban) fonksiyonlarının lineer toplamındaki katsayılardır. İncelenen bir diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{N} C_i \psi_i \qquad (5)$$

gibi olsun bu çözüm (4) yerine yazılırsa integral

$$\int_a^b R(x) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_i \psi_i(x)}{\partial C_i} \right) dx = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, N \qquad (6)$$

haline gelecektir. (6) denklemi daha basit olarak

$$F_i(C_i) = \int_a^b R(x; C_i) W_i(x)\, dx = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, N \qquad (7)$$

olarak yazılabilir. Bu integral, bilinmeyen katsayıları içeren bir denklem sisteminin kapalı formudur. i değerleri değiştirilerek $F_i(C_i)$ denklemleri oluşturulur. Ardından bu denklem sistemi çözümü olan C_i katsayıları bulunarak yaklaşık çözümde yerine konulur ve böylece Galerkin yöntemi bitirilir.

Bu yöntem, yaklaşık çözümde polinom kullanma avantajının yanı sıra, yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünü basit integrasyon hesaplamalarıyla bir denklem sisteminin çözümüne indirgeme şansı verir. Yöntemin uygulanması için sınır şartlarıyla verilen denklem göz önüne alınsın (Ogunrinde vd.,)

$$y^{8}(x)+xy(x)=-(48+15x+x^{3})e^{x} \quad , \qquad 0<x<1 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &y(0)=0 && y(1)=0\\ &y'(0)=1 && y'(1)=-e\\ &y''(0)=1 && y''(1)=-4e\\ &y'''(0)=-3 && y'''(1)=-9e \end{aligned} \tag{9}$$

(9) ile verilen sınır şartları kullanılarak oluşan denklem sistemindeki bilinmeyen C_0 dan C_7 ye kadar olan katsayılar, diğer bilinmeyenler olan C_8 ve C_9 ktsayılarına bağlı olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} &C_0=0 && C_4=-0.331+C_8+4C_9\\ &C_1=1 && C_5=-0.133-4C_8-15C_9\\ &C_2=0 && C_6=-0.021+6C_8+20C_9\\ &C_3=-0.5 && C_7=-0.013-4C_8-10C_9 \end{aligned} \tag{10}$$

Böylece yaklaşık çözümdeki bütün katsayılar sadece C_8 ve C_8 katsayılarına bağlı olmuştur. Bu çözüm diferansiyel denkleme yazıl kalan

$$\begin{aligned} R(x)=&\mathrm{e}^{x}\left(48+15x+x^{3}\right)+40320C_8+362880xC_9+x(1.x-1.x^{2}+x^{8}C_8\\ &+x^{5}\left(-4.C_8-15.C_9\right)+x^{7}\left(-4.C_8-10.C_9\right)+x^{9}C_9+x^{4}\left(C_8+4.C_9\right)\\ &+x^{6}\left(6.C_8+20.C_9\right) \end{aligned} \tag{11}$$

olacaktır. Galerkin yönteminde kullanılacak katsayılara göre kısmi türevler ise

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial C_8}=x^{4}-4x^{5}+6x^{6}-4x^{7}+x^{8}\\ &\frac{\partial y}{\partial C_9}=4x^{4}-15x^{5}+20x^{6}-10x^{7}+x^{9} \end{aligned} \tag{12}$$

olmaktadır. (11) ve (12) denklemleri (6) da yerine yazılır ve integral sınırlarının a=0 ve b=1 olması gerektiğine dikkat edilirse

$$\begin{aligned} &\int_0^1 R(x)\left(\frac{\partial y}{\partial C_8}\right)dx=0.148455+64C_8+288.00001C_9\\ &\int_0^1 R(x)\left(\frac{\partial y}{\partial C_8}\right)dx=0.67236+288C_8+1309.0909C_9 \end{aligned} \tag{13}$$

şeklinde verilen denklem sistemine ulaşıkacaktır. Bu denklem sisteminin çözümünden $C_8 = -0.000834$ ve $C_9 = -0.00033$ çıkacaktır. Bu durumda (8) ve (9) ile verilen diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü

$$y_{yaklaşık} = x - x^2 - 0.00215x^4 + 0.0082x^5 - 0.0116x^6 + 0.006x^7 - 0.0008x^8 - 0.0003x^9 \qquad (14)$$

olarak bulunur. Galerkin yöntemi yüksek mertebeden değişken katsayılı nonlineer diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmakta da kullanılabilir. Bunun için verilen diferansiyel denklem göz önüne alınsın (Noor ve Mohyud-Din)

$$\begin{aligned} &y^{(8)}(x) = e^{-x}y^2 \quad , \qquad 0 < x < 1 \\ &y(0) = y''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(6)}(0) = 1 \\ &y(1) = y''(1) = y^{(4)}(1) = y^{(6)}(1) \ = e \end{aligned} \qquad (15)$$

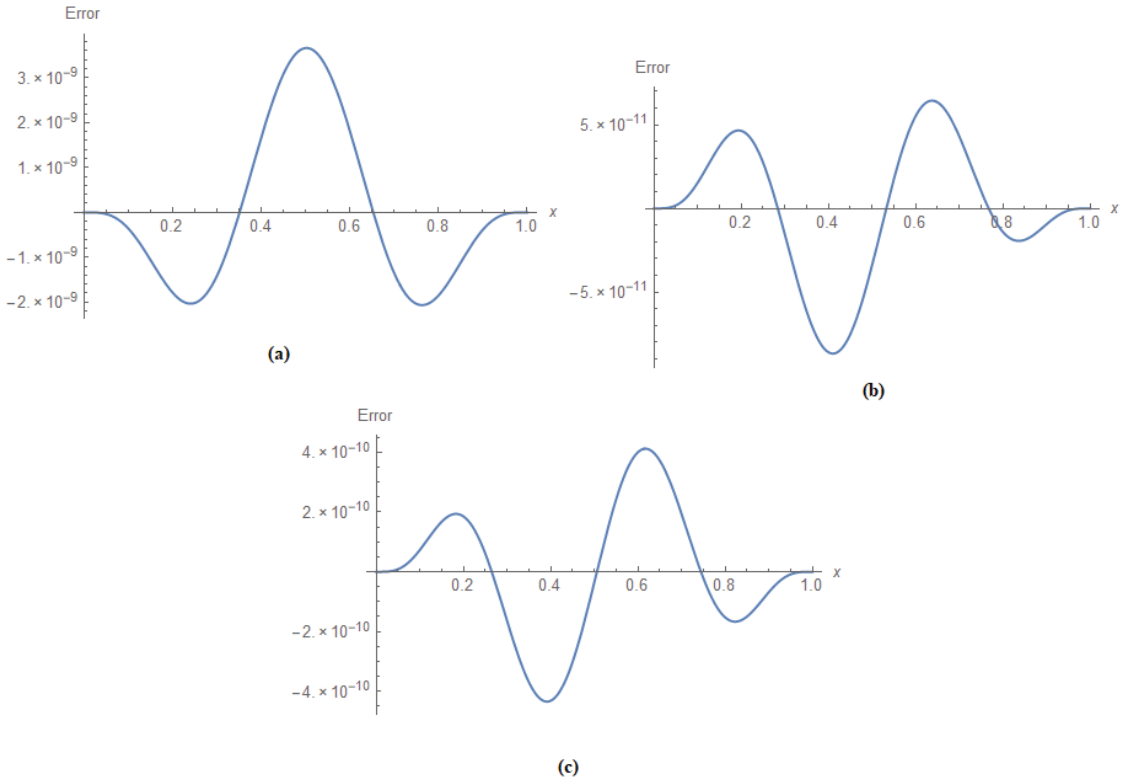
Analitik çözüm $y(x) = e^x$ olmaktadır. (15) ile verilen diferansiyel denklemin yaklaşık çözümlerinde sırasıyla 9. dereceden 13. dereceye kadar değişen polinomlar alınarakbirinci problemdeki işlem adımları izlenerek galerkin yöntemiyle bulunan çözümler

$$\begin{aligned} y_9 &= 1 + 0.999x + 0.5x^2 + 0.166x^3 + 0.041x^4 + 0.008x^5 + 0.001x^6 \\ &\quad + 0.0001791551376703825 1x^7 + 0.00003x^8 + 1.8\times10^{-7}x^9 \\ y_{10} &= 1 + 0.999x + 0.5x^2 + 0.166x^3 + 0.041x^4 + 0.008x^5 + 0.0013x^6 \\ &\quad + 0.0001x^7 + 0.00003x^8 + 2.1\times10^{-7}x^9 + 2.4\times10^{-8}x^{10} \\ y_{11} &= 1 + 0.999x + 0.5x^2 + 0.1666x^3 + 0.041x^4 + 0.008x^5 + 0.001x^6 \\ &\quad + 0.0002x^7 + 0.00001x^8 + 2.6\times10^{-9}x^9 + 0.000001x^{10} \\ &\quad - 4.72113360612999\times10^{-10}x^{11} \\ y_{12} &= 1 + 0.999x + 0.5x^2 + 0.166x^3 + 0.041x^4 + 0.008x^5 + 0.001x^6 \\ &\quad + 0.0001x^7 + 0.00004x^8 + 4.2\times10^{-7}x^9 - 4.8\times10^{-8}x^{10} \\ &\quad + 4.8\times10^{-10}x^{11} + 8.1\times10^{-12}x^{12} \\ y_{13} &= 1. + 0.999x + 0.5x^2 + 0.1666x^3 + 0.041x^4 + 0.008x^5 + 0.001x^6 + \\ &\quad 0.0001x^7 + 0.00003x^8 + 4.7\times10^{-7}x^9 - 2.4\times10^{-8}x^{10} + 3.8\times10^{-10}x^{11} \end{aligned} \qquad (16)$$

gibi olacaktır.

BULGULAR

Galerkin yönteminde kullanılan deneme fonksiyonun derecesi N olmak üzere birinci problemde noktasal bazda yapılan hatalar Şekil 1. de gösterilmiştir.



Şekil 1. Değişken katsayılı Lineer denklemin Galerkin çözümünde yapılan noktasal hata

(a) N=9 için (b) N=10 için ve (c) N=11 için

Deneme fonksiyonun derecesinin değişimiyle nokta bazında yapılan en büyük mutlak hatalar Tablo 1 de görülmektedir.

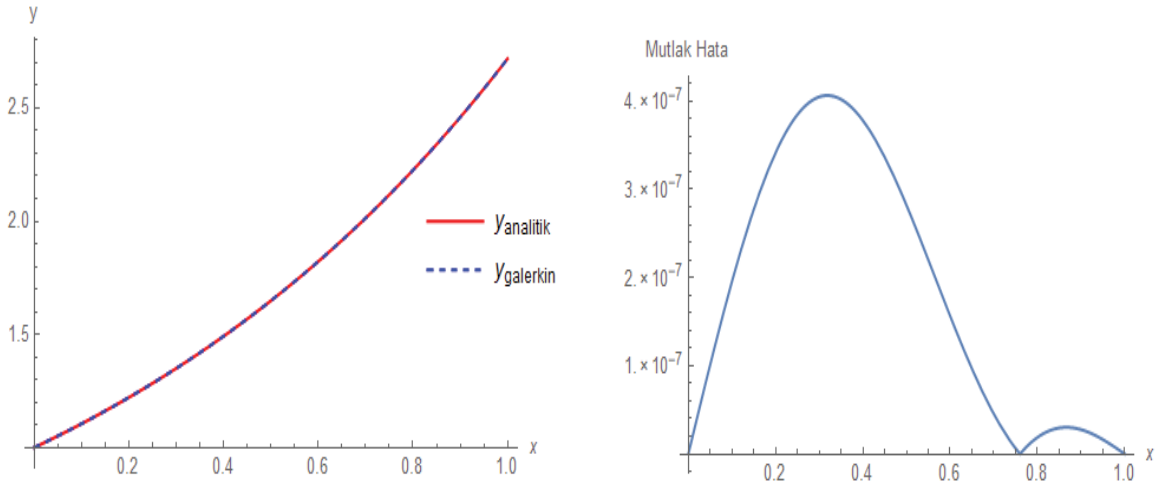
Tablo 1. Lineer problemde deneme fonksiyonun farklı dereceleri için yaklaşık çözümdeki en büyük mutlak hata

x	N=9	N=10	N=11	N=12	N=13	N=14	N=15	Ogunrinde and Ojo.
0.0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	3.59e-10	1.54e-11	7.39e-11	1.85e-11	4.58e-08	4.36e-07	8.94e-07	1.19e-05
0.2	1.78e-09	4.63e-11	1.84e-10	1.81e-10	8.69e-08	1.43e-06	1.21e-07	1.45e-04
0.3	1.41e-08	1.56e-11	1.65e-10	5.81e-11	7.14e-08	1.36e-06	1.50e-05	5.50e-04
0.4	1.67e-08	8.59e-11	4.31e-10	4.47e-10	2.31e-07	1.24e-06	3.40e-05	1.26e-03
0.5	3.66e-08	3.39e-11	3.39e-11	3.34e-10	3.63e-10	2.89e-06	1.86e-05	2.18e-03
0.6	1.81e-08	5.52e-11	4.00e-10	3.84e-10	2.32e-07	7.87e-07	2.16e-05	2.82e-02
0.7	1.35e-08	4.30e-11	1.93e-10	4.17e-10	7.20e-08	1.50e-06	3.43e-05	3.81e-03
0.8	1.85e-09	1.40e-11	1.52e-10	4.17e-10	8.69e-08	1.26e-06	1.70e-05	4.22e-03
0.9	3.84e-10	9.46e-12	6.80e-11	1.55e-10	4.59e-08	3.45e-07	3.97e-06	4.31e-03
1.0	1.38e-17	4.16e-17	1.90e-17	1.25e-17	3.81e-14	1.90e-12	5.09e-11	4.36e-03

İncelenen ikinci problem nonlineer olduğundan yaklaşık çözümün katsayıları birden fazla reel ve karmaşık sayı değeri almaktadır. N=11 için hesaplanan bu katsayılardan mutlak değerce en küçük olanları alınırsa yaklaşık çözüm gerçek çözümle uyuşmaktadır. Bu katsayılar

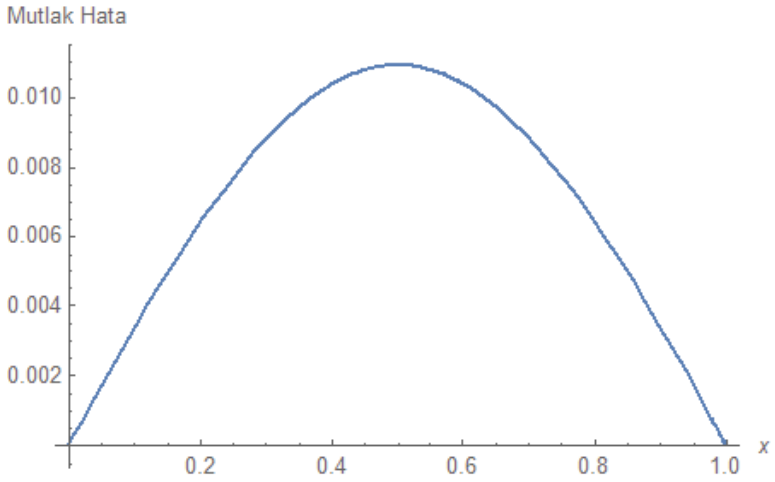
$$C_8 = 0.000018 \qquad C_9 = 2.6\times10^{-9}$$
$$C_{10} = 0.000001 \qquad C_{11} = -4.7\times10^{-10} \tag{17}$$

gibi olmaktadır. Şekil 2. de bu katsayılar için yaklaşık çözüm ve Mutlak hatalar görülmektedir.



Şekil 2. Nonineer denklemin yaklaşık çözümünde katsayıların mutlak değerce en küçük alınması durumunun gerçek çözümle karşılaştırılması ve Mutlak hatalar (N=11 için)

Eğer N=11 durumunda katsayıların karmaşık sayı olanları alınırsa mutlak hata daha büyük olmaktadır. Şekil 3 de bu durum görülmektedir.



Şekil 3. Nonineer denklemin yaklaşık çözümünde katsayıların karmaşık sayı alınması durumunda Mutlak hatalar (N=11 için)

Şekil 3. çizdirilirken katsayılar

$$C_8 = -0.002 + 0.002\mathrm{i} \qquad C_9 = 0.00001 + 0.00003\mathrm{i}$$

$$C_{10} = -5.0\times10^{-7} - 0.000001\mathrm{i} \qquad C_{11} = 1.4\times10^{-8} + 3.21\times10^{-8}\mathrm{i}$$

(18)

olarak alınmıştır. Tablo 2 de Nonlineer problem için en büyük mutlak hatalar görülmektedir.

Tablo 2. Nonlineer problemde deneme fonksiyonun farklı dereceleri için yaklaşık çözümdeki en büyük mutlak hata

x	N=9	N=10	N=11	N=12	N=13	Noor et. al.
0.0	0	0	0	0	0	0
0.1	1.78E-06	1.83E06	1.95E-07	1.11E-07	1.07E-06	1.27E-05
0.2	3.43E-06	3.51E-06	3.41E-07	2.46E-07	2.07E-06	2.43E-05
0.3	4.80E-06	4.91E-06	4.04E-07	4.13E-07	2.93E-06	3.35E-05
0.4	5.75E-06	5.88E-06	3.78E-07	5.97E-07	3.55E-06	3.94E-05
0.5	6.17E-06	6.30E-06	2.81E-07	7.57E-07	3.85E-06	4.16E-05
0.6	6.00E-06	6.12E06	1.56E-07	8.44E-07	3.78E-06	3.96E-05
0.7	5.20E-06	5.29E-06	4.53E-08	8.14E-07	3.31E-06	3.38E-05
0.8	3.83E-06	3.90E-06	1.86E-08	6.47E-07	2.46E-06	2.45E-05
0.9	2.03E-06	2.07E-06	2.75E-08	3.59E-07	1.31E-06	1.29E-05
1.0	4.40E-16	0	4.44E-16	0	0	1.00E-09

SONUÇ VE TARTIŞMA

Galerkin yöntemi Lineer ve Nonlineer bir diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü polinomlar kullanarak bulmaya yarayan uygun bir sayısal yöntemdir. Integral alma işlemleri simgesel matematik yazılımları ile yapılırsa yöntemin programlaması daha kolay olmaktadır. Nonlineer problemlerde bir katsayının birden fazla reel veya karmaşık değeri olmaktadır. Uygun yaklaşık çözüm için bu değerlerden mutlak değerce en küçük olanını almak gerekir. Sınır şartlarını sağladığı sürece herhangi bir test (deneme) fonksiyonu seçilebilir. Tablo 1. ve Tablo 2. incelendiğinde yöntemde kullanılan polinom şekilindeki deneme fonksiyonun derecesinin artmasıyla mutlak hatanın azalmadığı görülmektedir. Bu sorunun çözüm için özel polinomlar (Chebyshev, Legendre, Lagurre vb.) yöntemde kullanılabilir

İncelenen örneklerin yaklaşık çözümlerini bulmakta basit polinomları kullanmak etkili bir sonuç vermiştir. Başka bir çalışmada yaklaşık çözümdeki hatanın çok önemli miktarda düşürülmesi önemli ise Galerkin yönteminde integrali kolay alınabilen herhangi bir özel fonksiyon da kullanılabilir

KAYNAKÇA

Çağlar, H. N., Çağlar, S. H. and Twizell, E. H. (1999). Numerical solution of fifth-order boundary value problems with sixth-degree B-spline functions. *Applied Mathematics Letter*, *12* (5), 25-30. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(99)00052-X

Engin, T. ve Çengel, Y.A. (2021, 5 Ağustos). Mühendisler için Diferansiyel Denklemler. https://cdn2.beun.edu.tr/metalurji/2018/03/tek/muhendisler-icin-diferansiyel-denklemler.pdf

Ertürk, V. S. and Momani, S. (2008). Differential transform technique for solving fifth-order boundary value problems. *Mathematical and Computational Applications*, *13* (2), 113-121. https://doi.org/10.3390/mca13020113

Hassan, A. H. and Ertürk, V. S. (2009). Solutions of different types of the linear and non-linear higher-order boundary value problems by differential transformation method. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, *2*(3), 426-447. https://ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/412

Karaoğlu, B. (2007). *Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler* (5.Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık

Momani, S. and Noor, M. A. (2007). Numerical comparison of methods for solving a special fourth-order boundary value problem. *Applied Mathematics and Computation*, *191* (1)*,218–224*. https://doi:10.1016/j.amc.2007.02.081

Noor, M. A. and Mohyud-Din, T. S. (2007). Variational iteration decomposition method for solving eighth-order boundary value problems. *Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Volume 2007, Article ID 19529.* https://doi:10.1155/2007/19529

Ogunrinde, R. B. and Ojo, O. M. (2018). Application of differential transformation method to boundary value problems of order seven and eight. *American Journal of Computational Mathematics*, *8* (3), 269-278. https://doi.org/10.4236/ajcm.2018.83022

Wazwaz, A. M. (2001). The numerical solution of fifth-order boundary value problems by the decomposition method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *136* (1-2), 259–270. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00618-X