7th International Conference on Scientific and Academic Research

December 23-24, 2025: Konya, Turkey

© 2025 Published by All Sciences Academy

https://www.icsarconf.com/

Değişken Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemlerin En Küçük Kareler Yaklaşık Çözümleri

Birkan DURAK[1*]

[1] *Elektrik ve Enerji Bölümü, İklimlendirme Soğutma Teknolojisi Programı / Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Türkiye*

[*] *(birkand@iuc.edu.tr)*

Özet – Diferansiyel denklemler ve onların çözümleri matematiğin ve mühendisliğin özel ilgi alanındadır. Lineer diferansiyel denklemler içerisinde sabit katsayılı olanları için çeşitli analitik yöntemler geliştirilmiş ve yaygın olarak kullanılmaktadır. Değişken katsayılı olanları için bu çeşitliliği görememekteyiz. Bazı problem tiplerine uygun dönüşümlerle veya en sıkta seri çözümleriyle incelenen denkleme çözümler aranır. Çalışmada değişken katsayılı diferansiyel denklemlere yaklaşık sayısal çözümler elde etmekte kullanılmak amacıyla en küçük kareler yöntemi önerilmiştir. En küçük kareler yöntemi, ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden bir tanesidir. Önerilen yaklaşık çözümün ana diferansiyel denkleme yazılmasıyla elde edilen kalan, ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonlarla çarpılır ve bu çarpım problemin sınırlarında integre edilerek, integral sıfıra eşitlenir. Böylece önerilen yaklaşık çözümdeki katsayıların sayısı kadar denkleme sahip bir denklem sistemine ulaşılır. Bu denklemin çözümüyle aranan yaklaşık çözüm katsayıları hesaplanarak çözüm bitirilir. İlerleyen kısımlarda öncelikle en küçük kareler yönteminin matematiksel alt yapısı açıklanmıştır. İkinci adımda bazı test problemlerine bu yöntemle yaklaşık çözümler bulunmuştur. Son olarak yöntemin etkinliği, avantaj ve dezavantajları tartışılmıştır. Bu çalışmada önerilen yaklaşık çözümün polinom olarak alınması en küçük kareler yöntemindeki integrallerin simgesel matematik yazılımlarıyla kolay bir şekilde hesaplanmasını sağlamıştır. Bu yöntemde kurulan denklem sisteminin çözümü için gene matematik yazılımlarıyla kolayca elde edilebilmektedir. İncelenen problemlere kabul edilebilir mutlak hatalarla yaklaşık çözüm bulmaya imkan veren bu yöntem lineer veya nonlineer değişken katsayılı denklemlere uygulanabilecek etkili bir yöntemdir.

Anahtar Kelimeler – Değişken katsayılı diferansiyel denklem, En küçük kareler yöntemi, Sayısal çözüm, Ağırlıklı kalanlar, Yaklaşık çözüm

I. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler ve onların çözümleri matematiğin ve mühendisliğin özel ilgi alanındadır. Lineer diferansiyel denklemler içerisinde sabit katsayılı olanları için çeşitli analitik yöntemler geliştirilmiş ve yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak, uygulamadaki birçok diferansiyel denklem o kadar karmaşıktır ki, her zaman basit bir çözüme ulaşmak mümkün olmaz [1]. İkinci mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin analitik çözümü için, Riccati denklemine dönüştürerek çözmek gibi bazı yöntemler geliştirilmiştir [2].

Analitik çözümün zor veya mümkün olmadığ denklemler için çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları Açık Euler , Runge-Kutta, Sonlu Farklar, Diferansiyel Dönüşüm, Adomian Ayrıştırma, Homotopi Pertürbasyon ve Atış yöntemidir [3]. Değişken katsayılı olanları için bu çeşitlilik görülememektedir. Bazı problem tiplerine uygun dönüşümlerle veya en sıkta seri çözümleriyle incelenen denkleme çözümler aranır. Bu çalışmada değişken katsayılı diferansiyel denklemlere yaklaşık sayısal

çözümler elde etmekte kullanılmak amacıyla en küçük kareler yöntemi önerilmiştir. İlerleyen kısımlarda öncelikle en küçük kareler yönteminin matematiksel alt yapısı açıklanmıştır. İkinci adımda bazı test problemlerine bu yöntemle yaklaşık çözümler bulunmuştur. Son olarak yöntemin etkinliği, avantaj ve dezavantajları tartışılmıştır.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

En küçük kareler yöntemi, ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden bir tanesidir. Önerilen yaklaşık çözümün ana diferansiyel denkleme yazılmasıyla elde edilen kalan, ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonlarla çarpılır ve bu çarpım problemin sınırlarında integre edilerek, integral sıfıra eşitlenir. Böylece önerilen yaklaşık çözümdeki katsayıların sayısı kadar denkleme sahip bir denklem sistemine ulaşılır. Bu denklemin çözümüyle aranan yaklaşık çözüm katsayıları hesaplanarak çözüm bitirilir.

A. En Küçük Kareler Yöntemi

Bir değişken katsayılı diferansiyel denklem, m terimi x'e bağlı en yüksek türevin derecesini olmak üzere

$$\begin{aligned} &y^{(m)} + y^n + f(x)h(x, y, y', ..., y^{(m-1)}) = 0 \\ &y(x_1) = a \\ &y(x_2) = b \end{aligned} \tag{1}$$

ile basitçe gösterilebilir. Burada n bağımlı değişken olan y nin kuvvetini gösterir. Bu probleme önerilen yaklaşık çözüm N polinomun derecesi iken

$$\overline{y} = \sum_{n=0}^{N} C_n x^n \tag{2}$$

şeklinde kabul edilsin. Bu çözümdeki C_N katsayılarını bulmak için öncelikle kalan bulunmalıdır. Bunun için

$$R(x) = \overline{y}^{(m)} + \overline{y}^n_{yaklaşık} + g(x) \tag{3}$$

ifadesinden yararlanılır. Sonra, Denklem (3) ile verilmiş olan bu kalan,

$$W_n = \frac{\partial R}{\partial C_n} \quad , \qquad n = 1, 2, 3, ..., N \tag{4}$$

olarak tanımlanmış ağırlık fonksiyonlarıyla çarpılır. Ardından denklem (1) in sınırlarında integre edilerek sıfıra eşitlenir böylece

$$\int_{x_1}^{x_2} R W_n dx = 0 \tag{5}$$

denklem (5) teki denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanları denklem (2) de verilmiş olan yaklaşık çözümün $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_N$ aranan katsayılarıdır. Bu katsayılar yerine yazılarak denklem (1) de verilmiş olan ana problemin yaklaşık çözümü en küçük kareler yöntemiyle bulunmuş olur.

B. Yöntemin diferansiyel denklemlere uygulanması

Birinci problem olarak aşağıdaki başlangıç değer problemi göz önüne alınsın [4].

$$xy''(x) + (1-2x)y'(x) - 2y(x) = 0 \qquad (6)$$
$$y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 2$$

İncelenen bu problemin kesin çözümü $y(x) = e^{2x}$ ' tür. Bu probleme

$$\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{5} C_n x^n \qquad (7)$$

şeklinde beşinci dereceden bir polinom, yaklaşık çözüm olarak aransın. Denklem (1) deki sınır şartlarına göre aranan bu yaklaşık çözüm

$$\bar{y}(x) = 1 + 2x + \sum_{n=2}^{5} C_n x^n \qquad (8)$$

olmalıdır. Denklem (3) ile verilen bu yaklaşık çözüm denklem (1) de yerine yazılırsa kalan

$$R(x) = x(2C_2 + 6xC_3 + 12x^2C_4 + 20x^3C_5) + (1-2x)(2 + 2xC_2 + 3x^2C_3 + 4x^3C_4 + 5x^4C_5) - 2(1 + 2x + x^2C_2 + x^3C_3 + x^4C_4 + x^5C_5) \qquad (9)$$

olarak bulunur. Denklem (8)'deki C_n katsayılarını bulmak için kullanılacak ağırlık fonksiyonları ise denklem (4)'e göre sırasıyla

$$W_1(x) = 2x + 2(1-2x)x - 2x^2$$
$$W_2(x) = 6x^2 + 3(1-2x)x^2 - 2x^3 \qquad (10)$$
$$W_3(x) = 12x^3 + 4(1-2x)x^3 - 2x^4$$
$$W_4(x) = 20x^4 + 5(1-2x)x^4 - 2x^5$$

şeklinde bulunacaktır. Bu denklemdeki her ağırlık fonksiyonu denklem (9)'daki kalan ile çarpılarak ayrı ayrı sıfıra eşitlenmesi halinde bulunacak denklem sistemi

$$0.5333333333333C_2 - 0.2C_3 - 1.2952380952380C_4 - 2.619047619047C_5 = -1.3333333333$$
$$-0.2C_2 + 1.3428571428571427C_3 + 2.857142857142857C_4 + 4.30952380952380C_5 = 5.2 \qquad (11)$$
$$-1.2952380952380C_2 + 2.857142857142C_3 + 7.682539682539C_4 + 12.88888888C_5 = 12.2$$
$$-2.61904761904C_2 + 4.309523809523C_3 + 12.8888888888C_4 + 22.53535353535C_5 = 19.61$$

Bu sistemin çözümü sonucunda denklem (8) ile verilen yaklaşık çözüm katsayıları olan $C_2\ , C_3, C_4$ ve C_5 sırasıyla

$$C_2 = 1.8218388682663709 \qquad C_4 = -0.30804579419885375$$
$$C_3 = 1.9681394615689278 \qquad C_5 = 0.8821319125127759 \qquad (12)$$

olmaktadır. O halde denklem (6) daki problemin aranan çözümü

$$\bar{y}_5(x) = 0.882131912512x^5 - 0.3080457941988x^4 + 1.968139461568x^3 + 1.821838868x^2 + 2x + 1 \qquad (13)$$

şeklinde bulunur. Aynı problemin onuncu dereceden polinom kullanılarak bulunan yaklaşık çözümü ise

$$\bar{y}_{10}(x) = 0.0008x^{10} - 0.0003x^{9} + 0.009x^{8} + 0.02x^{7} + 0.09x^{6} + 0.2x^{5} + 0.6x^{4} + 1.3x^{3} + 2.0x^{2} + 2x + 1 \quad (14)$$

İkinci örnek ise aşağıdaki tekil sınır değer problemi olsun [5]

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(cosx + \frac{1}{x}sinx\right) = 0 \quad (15)$$
$$y'(0) = 0 \ , \ y(1) = cos\,(1)$$

Bu problemin analitik çözümü $cos(x)$'tir. Yaklaşık çözüm ilk problemdeki gibi beşinci dereceden bir polinom kabul edilir ve denklem (15)'teki sınır şartları dikkate alınırsa yaklaşık çözüm

$$\bar{y}(x) = \left(\cos(1) - C_2 - C_3 - C_4 - C_5\right) + \sum_{n=2}^{5} C_n x^n \quad (16)$$

olarak yazılabilir. Denklem (16) dan yararlanarak bu problem için kalan

$$R(x) = \cos x + \frac{\sin x}{x} + 2C_2 + 6xC_3 + 12x^2C_4 + 20x^3C_5 + \frac{2xC_2 + 3x^2C_3 + 4x^3C_4 + 5x^4C_5}{x} \quad (17)$$

şekilde elde edilir. Ağırlık fonksiyonları ve denklem (17)'deki kalan kullanılarak, denklem (16) daki bilinmeyen C_2 , C_3, C_4 ve C_5 katsayılarını verecek olan denklem sistemi ise matris formunda

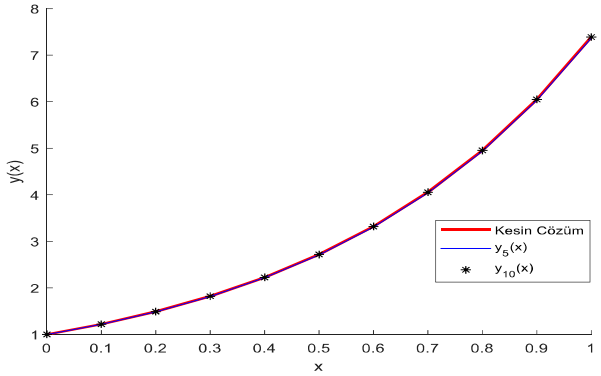
$$\begin{bmatrix} 16 & 18 & 21.33 & 25 \\ 18 & 27 & 36 & 45 \\ 21.33 & 36 & 51.2 & 66.67 \\ 25 & 45 & 66.67 & 89.28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.15022 \\ -7.57324 \\ -8.64484 \\ -9.87456 \end{bmatrix} \quad (18)$$

olmaktadır. Denklem (18) deki sistemin çözümü ile elde edilen katsayılar denklem (16)' da yerine yazılarak aranan yaklaşık çözüm

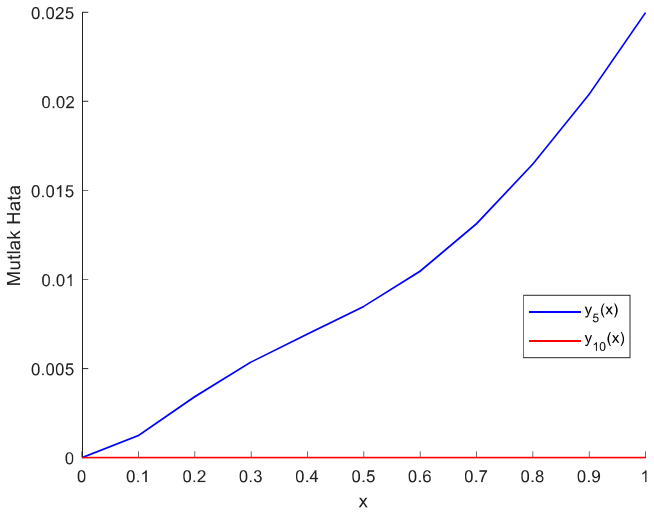
$$\bar{y}(x) = -0.003792x^{5} + 0.045372x^{4} - 0.001439x^{3} - 0.499839x^{2} + 1.000001 \quad (19)$$

III.BULGULAR

Birinci problem için analitik ve yaklaşık çözüm Şekil 1 ile verilmiştir. Şekil 2 de ise bulunan yaklaşık çözümler için yapılan mutlak hatalar farklı x' ler için verilmiştir.



Şekil 1. Birinci problem için farklı yaklaşık çözümlerin kesin çözümle karşılaştırılması



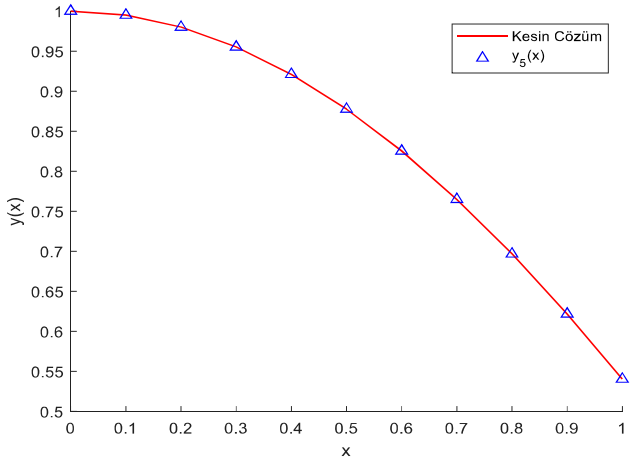
Şekil 2. Birinci problemde nokta bazında yapılan mutlak hatalar

Tablo 1 de onuncu dereceden polinom olarak önerilen yaklaşık çözümün değerleri, literatürdeki diğer yöntemlerle bulunan değerlerle karşılaştırılmıştır.

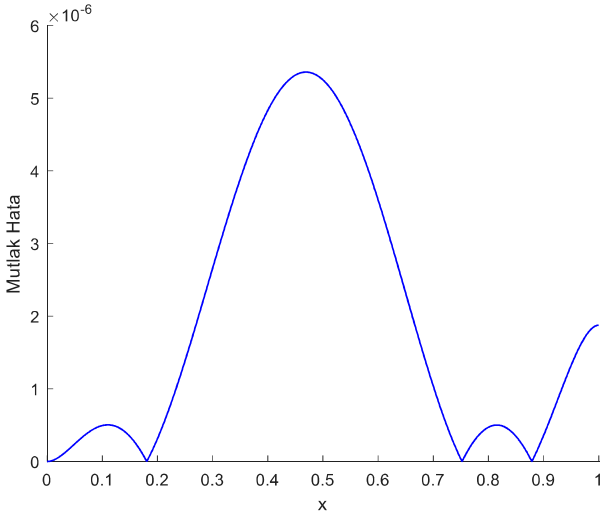
Tablo 1. Birinci problemde N=10 için En küçük Kareler yönteminin diğer yöntemlerle karşılaştırılması

x	Kesin Çözüm	SEJI integral transform	DTM	En Küçük Kareler	DTM deki Mutlak hata	En Küçük Karelerdeki Mutlak Hata
0.0	1.000000000	1.000000000	1.0000000000	1.000000000	0.00E+00	0.00E+00
0.1	1.221402758	1.221402758	1.221402667	1.221402761	9.10E-08	3.03E-09
0.2	1.491824697	1.491824698	1.491818667	1.491824701	6.03E-06	3.87E-09
0.3	1.822118800	1.822118800	1.822048000	1.822118805	7.08E-05	5.49E-09
0.4	2.225540928	2.225540928	2.225130667	2.225540935	4.10E-04	6.99E-09
0.5	2.718281828	2.718281828	2.716666667	2.718281837	1.62E-03	8.55E-09
0.6	3.320116922	3.320116923	3.315136000	3.320116933	4.98E-03	1.08E-08
0.7	4.055199966	4.055199967	4.042218667	4.055199980	1.30E-02	1.33E-08
0.8	4.953032424	4.953032424	4.923114667	4.953032440	2.99E-02	1.63E-08
0.9	6.049647464	6.049647464	5.986864000	6.049647484	6.28E-02	2.02E-08
1.0	7.389056098	7.389056099	7.266666667	7.389056123	1.22E-01	2.47E-08

Şekil 3 ile yöntemde beşinci dereceden bir polinomun seçerek bulunan yaklaşık çözüm ile kesin çözüm kıyaslanmıştır. En küçük kareler yöntemiyle bulunan bu yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar çeşitli x ‘ ler için Şekil 4 ile verilmiştir.



Şekil 3. İkinci problemde $N = 5$ için bulunan yaklaşık çözümün kesin çözümle karşılaştırılması



Şekil 4. İkinci problemde nokta bazında yapılan mutlak hatalar

IV. TARTIŞMA

Şekil 2 den de anlaşılacağı üzere birinci problem için önderilen yaklaşık çözümdeki polinomun derecesinin artşıyla mutlak hata azalmaktadır. Ayrıca N=10 için bulunan çözümdeki noktasal bazdaki mutlak hatalar DTM ile bulunanlardan daha küçük olmaktadır. İkinci problem için çok küçük mutlak hatalar için yaklaşık çözümün beşinci dereceden bir polinom olarak alınması yeterli olmuştur.

V. SONUÇLAR

Bu çalışmada ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden bir tanesi olan en küçük kareler yöntemiyle değişken katsayılı diferansiyel denklemlere yaklaşık çözümler bulunmuştur. Önerilen yaklaşık çözümün polinom olarak alınması en küçük kareler yöntemindeki integrallerin simgesel matematik yazılımlarıyla kolay bir şekilde hesaplanmasını sağlamıştır. Bu yöntemde kurulan denklem sisteminin çözümü için gene matematik yazılımlarıyla kolayca elde edilebilmektedir. İncelenen problemlere kabul edilebilir mutlak hatalarla yaklaşık çözüm bulmaya imkan veren bu yöntem lineer veya nonlineer değişken katsayılı denklemlere uygulanilecek etkili bir yöntemdir.

KAYNAKLAR

[1] B. Çına, "Numerical Solutions for Differential Equations Using Matlab", *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi*, vol. 41, no. 2, pp. 616–630, 2025.

[2] Y. Pala, ve Ç. Kahya, "New Analytical Method For Solution of Second Order Ordinary Differential Equations With Variable Coefficients". *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 15(3), 757-774. 2022

[3] S. Çavuşoğlu, O. Mukhtarov, and H. Olgar, "Finite Difference Method for Approximate Solution of a Boundary Value Problem with Interior Singular Point", *Konuralp J. Math.,* vol. 9, no. 1, pp. 40–48, 2021.

[4] N. S. Nasron, N. A. Abd Latif, and N. Che Him, "Comparing Differential Transform Method (DTM) And SEJI Transform For Solving Ordinary Differential Equations With Variable Coefficients", *EKST*, vol. 5, no. 1, pp. 93–100.

[5] M. Kumar, "A three-point finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 145(1), 89–97. 2002.