Nonlineer Diferansiyel Denklemlerin Momentler Yöntemi Çözümleri

Birkan DURAK[1*]

Aziz SEZGİN[2]

1 İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, Uçak Teknolojisi Programı, birkand@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0002-8196-5407
2 İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü, asezgin@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0001-6861-5309
*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Birkan DURAK , birkand@iuc.edu.tr

ÖZET

Mühendislik ve fen bilimlerindeki bazı süreçler ve problemler nonlineer diferansiyel denklemlerle ifade edilirler. Nonlineer diferansiyel denklemlerin kaotik davranışı ve başlangıç değerlerine bağlılığı genel çözümlerini bulmayı zorlaştırır. Lineer denklemlerde kullanılan basit çözümlerin üst üste toplanmasına izin veren süperpozisyon ilkesi bu denklemler için kullanılamaz, diferansiyel denklem teorisindeki çözümün varlığını ve tekliğini garantileyen teoremler bu diferansiyel denklemler için kullanılamamaktadır. Fourier serisi, Laplace dönüşümü ve parametrelerin değişimi vb. analitik yöntemler bu denklem grubunun çözümlerine uygulansa bile çözüme ya ulaşılamaz ya da bulunan çözüm tek değildir. Bahsedilen bu zorluklar yüzünden nonlineer denklem diferansiyel denklemlerin özelliklerini ve davranışlarını incelemek amacıyla çeşitli sayısal yöntemlerden, pertürbasyon tekniğinden, sayısal simülasyonlardan ve nitel analiz gibi özel tekniklerden yararlanılır. Bu çalışmada ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden birisi olan momentler yöntemi nonlineer diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılmıştır.

Bu yöntemde ilk adımda bir yaklaşık çözüm önerilir. Diferansiyel denkleme yazılan bu çözüm ile kalan elde edilir. İkinci adımda bu kalan ağırlık fonksiyonu adı verilen fonksiyonlarla çarpılarak, sınırlarda integre edildikten sonra sıfıra eşitlenir. Bu sayede elde edilen nonlineer denklem sisteminin çözümü incelenen problemin yaklaşık çözümünün katsayıları vermektedir.

Kullanılan ağırlık fonksiyonlarının ve yaklaşık çözümün polinom olarak alınması bu yöntemdeki integral hesabını kolaylıkla gerçekleştirmeye imkan verir. Momentler yöntemiyle bir problem için analitik çözüm bulmakta mümkündür. Yöntem sonucunda meydana gelen nonlineer denklem sisteminin çözüm kümelerinin elemanları birden fazla reel ve/veya karmaşık sayı ise bunlar arasında reel en küçük katsayıları içerenini seçmek göz önüne alınan probleme en uygun yaklaşık çözümü vermektedir. Çeşitli mühendislik problemlerinin yanı sıra integral, integro-diferansiyel vb. denklem veya denklem sistemlerinin çözümlerini bulmakta momentler yöntemi kullanılabilir.

Anahtar Kelimeler – Momentler yöntemi, Ağırlıklı kalanlar, Yaklaşık çözüm, Sayısal analiz, Nonlineer diferansiyel denklem

GİRİŞ

Nonlineer diferansiyel denklemler yapısal olarak lineer diferansiyel denklemlere benzerler. Bu denklem tipini lineer olanlardan ayıran özellik trigonometrik veya logaritmik fonksiyonlar gibi lineerliği bozan terimleri içermesidir. Bu denklemlerin çözümlerinin bulunmasındaki güçlükler

yüzünden çeşitli sayısal teknikler, pertürbasyon yöntemi ve nitel analiz gibi özel teknikler kullanılır. Bu çalışmada öncelikle Momentler yöntemi tanıtılmış ve ardından bu yöntemle çeşitli problemler çözülmüştür.

1- Momentler Yöntemi

Değişken katsayılı homojen olmayan nonlineer diferansiyel denklem sınır şartlarıyla

$$\begin{aligned} &y^{(k)} + y^m + f\,(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}) = 0 \\ &y(a) = x_1 \\ &y(b) = x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde k ile türev derecesi ve m ile de bağımlı değişken y' nin kuvveti gösterilmiştir. Ayrıca x_1, x_2, a ve b ise reel sayılardır. Denklem (1)'in yaklaşık çözümü

$$\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n x^n \tag{2}$$

gibi bir polinom olsun. N burada polinomdaki en yüksek dereceyi göstermektedir. Denklem (2) 'nin, denklem (1)' de yerine yazılmasıyla kalan

$$R(x) = \bar{y}^{(k)}(x) + \bar{y}^m(x) + g(x) \tag{3}$$

olarak bulunacaktır. Denklem (2)'deki $C_0, C_1, C_2, \dots, C_N$ katsayılarının hesaplanması için denklem (3), $W_i(x) = x^i,\ i = 0,1,2,3, \dots, N$ şeklinde tanımlanan ağırlık fonksiyonlarıyla çarpılır ve problem sınırlarında integre edilerek sıfıra eşitlenir. Böylece kapalı formu

$$\int_a^b R(x) W_i(x) dx = 0 \tag{4}$$

denklem (4) deki gibi olan nonlineer denklem sistemine ulaşılır. Sistemin çözümüyle bulunan $C_0, C_1, C_2, \dots, C_N$ katsayıları, denklem (2)'de yerine yazılırsa denklem (1) ile verilen nonlineer denklemin yaklaşık çözümü bulunmuş olur.

2- Momentler Yöntemin Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Momentler yöntemini verilen probleme uygulayalım (Li vd., 2014).

$$y'(x) = 1 + y^2$$
$$y(0) = 0 \tag{5}$$

Yaklaşık çözüm

$$y = \sum_{n=0}^{5} C_n x^n \tag{6}$$

şeklinde olsun. Denklem (5) deki şart uygulanırsa denklem (6) daki denklemin yaklaşık çözümü

$$y = \sum_{n=1}^{5} C_n x^n \tag{7}$$

olur. Denklem (7), denklem (5) te yerine yazılırsa kalan

$$R(x) = -1 + C_1 + 2xC_2 + 3x^2C_3 + 4x^3C_4 + 5x^4C_5 - (xC_1 + x^2C_2 + x^3C_3 + x^4C_4 + x^5C_5)^2 \tag{8}$$

olarak bulunur. Yöntem uygulanırken denklem (8) deki kalan aşağıda verilen ağırlık fonksiyonlarıyla çarpılarak problemin sınırlarında integre edilerek sıfıra eşitlenirse

$$W_0 = x^0$$
$$W_1 = x^1$$
$$W_2 = x^2 \tag{9}$$
$$W_3 = x^3$$
$$W_4 = x^4$$

denklem (10) ile verilen sisteme ulaşılır.

$$\int_0^1 R(x).W_0(x)\,dx = 0$$
$$\int_0^1 R(x).W_1(x)\,dx = 0$$
$$\int_0^1 R(x).W_2(x)\,dx = 0 \tag{10}$$
$$\int_0^1 R(x).W_3(x)\,dx = 0$$
$$\int_0^1 R(x).W_4(x)\,dx = 0$$

olacaktır. Bu denklem sisteminin açık hali aşağıdaki gibidir.

$$-1. + C_1 - 0.3333C_1^2 + C_2 - 0.5C_1C_2 - 0.2C_2^2 + C_3 - 0.4C_1C_3$$
$$-0.3333C_2C_3 - 0.1428C_3^2 + C_4 - 0.3333C_1C_4 - 0.2857C_2C_4 - 0.25C_3C_4$$

$$-0.1111C_4^2 + C_5 - 0.2857C_1C_5 - 0.25C_2C_5 - 0.2222C_3C_5 - 0.2C_4C_5 - 0.0909C_5^2 = 0$$

$$-0.5 + 0.5C_1 - 0.25C_1^2 + 0.666C_2 - 0.4C_1C_2 - 0.1666C_2^2 + 0.75C_3 - 0.333C_1C_3 - 0.2857C_2C_3 - 0.125C_3^2 + 0.8C_4 - 0.2857C_1C_4 - 0.25C_2C_4 - 0.222C_3C_4 - 0.1C_4^2 + 0.8333C_5 - 0.25C_1C_5 - 0.222C_2C_5 - 0.2C_3C_5 - 0.1818C_4C_5 - 0.083C_5^2 = 0$$

$$-0.333 + 0.333C_1 - 0.2C_1^2 + 0.5C_2 - 0.333C_1C_2 - 0.142C_2^2 + 0.6C_3 - 0.2C_1C_3 - 0.2C_2C_3 - 0.1C_3^2 + 0.6C_4 - 0.2C_1C_4 - 0.2C_2C_4 - 0.2C_3C_4 - 0.090C_4^2 + 0.714C_5 - 0.222C_1C_5 - 0.2C_2C_5 - 0.1C_3C_5 - 0.166C_4C_5 - 0.076C_5^2 = 0 \quad (11)$$

$$-0.25 + 0.25C_1 - 0.1666C_1^2 + 0.4C_2 - 0.285C_1C_2 - 0.125C_2^2 + 0.5C_3 - 0.25C_1C_3 - 0.222C_2C_3 - 0.1C_3^2 + 0.571C_4 - 0.222C_1C_4 - 0.2C_2C_4 - 0.181C_3C_4 - 0.083C_4^2 + 0.625C_5 - 0.2C_1C_5 - 0.181C_2C_5 - 0.166C_3C_5 - 0.153C_4C_5 - 0.071C_5^2 = 0$$

$$-0.2 + 0.2C_1 - 0.1425C_1^2 + 0.333C_2 - 0.25C_1C_2 - 0.11C_2^2 + 0.42C_3 - 0.222C_1C_3 - 0.2C_2C_3 - 0.0909C_3^2 + 0.5C_4 - 0.2C_1C_4 - 0.181C_2C_4 - 0.166C_3C_4 - 0.076C_4^2 + 0.555C_5 - 0.181C_1C_5 - 0.166C_2C_5 - 0.153C_3C_5 - 0.142C_4C_5 - 0.066C_5^2 = 0$$

Denklem (11) deki denklem sisteminin çözümüyle

$$\begin{array}{ll} C_1 = 36.229 & C_1 = 1.019 \\ C_2 = -428.364 & C_2 = -0.265 \\ C_3 = 1528.58 & C_3 = 1.398 \\ C_4 = -2067.23 & C_4 = -1.684 \\ C_5 = 951.024 & C_5 = 1.089 \end{array} \quad (12)$$

şeklinde iki katsayı grubu bulunur. Bunlardan en küçük olanlarını içeren ikinci gruptaki katsayıları kullanmak denklem (5) ile verilen probleme uygun çözümü verecektir. Böylece çözüm

$$y(x) = 1.089x^5 - 1.684x^4 + 1.398x^3 - 0.265x^2 + 1.019x \quad (13)$$

olmaktadır.

Tablo 1 de problemin önerilen momentler yöntemiyle bulunan yaklaşık çözümü, Adomian ayrıklaştırma (Shawagfeh, 2002) ve dalgacık işlemsel matrisi metoduyla (Li vd., 2014) karşılaştırılmıştır.

Tablo 1: Birinci problem için yaklaşık çözüm ve diğer çözümler

x	*Adomian ayrıklaştırma*	*Dalgacık işlemsel matrisi*	*Momentler Yöntemi*
0.1	0.100335	0.100342	0.100550
0.2	0.202710	0.202726	0.202157
0.3	0.308336	0.309372	0.308779
0.4	0.422793	0.422832	0.422948
0.5	0.546302	0.546363	0.547070
0.6	0.684131	0.684251	0.684738
0.7	0.842245	0.842411	0.842039
0.8	1.029370	1.029849	1.028855
0.9	1.258800	1.260573	1.260178
1.0	1.551370	1.557938	1.557411

İkinci test problemi olarak kesin çözümü $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}}$ olan ve sınır şartlarıyla aşağıdaki problem göz önüne alınsın (Hosseini ve Abbasbandy, 2015)

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + y^5 \qquad (14)$$
$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

Bu problem için $0 < x < 1$ olmak üzere dördüncü dereceden bir polinom şeklinde yaklaşık çözüm

$$y = \sum_{n=0}^{4} C_n x^n \qquad (15)$$

olarak kabul edilir ve başlangıç koşullarına dikkat edilirse son durumda bu çözüm

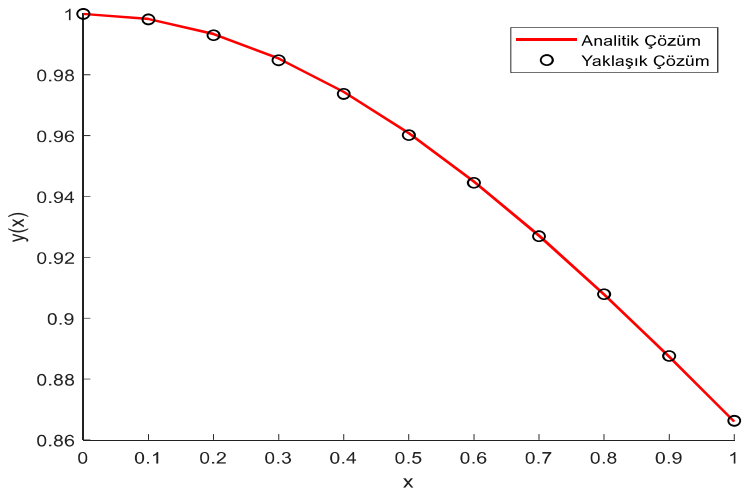
$$y = 1 + \sum_{n=2}^{4} C_n x^n \qquad (16)$$

formunda olur. İlk problemdeki benzer işlem adımları uygulanırsa aşağıdaki üçüncü ve dördüncü dereceden polinom şeklinde çözümler bulunacaktır.

$$y_3 = 1 - 0.1847487931349894x^2 + 0.051039789823759674x^3$$

$$y_4 = 1 - 0.17512797197473165x^2 + 0.03101x^3 + 0.01016x^4 \qquad (17)$$

Şekil 1 de analitik çözüm ile üçüncü dereceden polinom şeklindeki yaklaşık çözüm değerleri grafik olarak verilmiştir.



Şekil 1: İkinci problem için analitik ve yaklaşık çözümler

Tablo 2 de bu iki yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar verilmiştir. tablodaki N yaklaşık çözümde kullanılan polinomun derecesini göstermektedir.

Tablo 2: İkinci problem için yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar

x	$N = 3$	$N = 4$
0.1	$1.33\text{x}10^{-4}$	$5.67\text{x}10^{-5}$
0.2	$3.80\text{x}10^{-4}$	$1.39\text{x}10^{-4}$
0.3	$5.78\text{x}10^{-4}$	$1.71\text{x}10^{-4}$
0.4	$6.47\text{x}10^{-4}$	$1.29\text{x}10^{-4}$
0.5	$5.76\text{x}10^{-4}$	$3.86\text{x}10^{-5}$
0.6	$3.96\text{x}10^{-4}$	$5.93\text{x}10^{-5}$
0.7	$1.65\text{x}10^{-4}$	$1.20\text{x}10^{-4}$
0.8	$5.17\text{x}10^{-5}$	$1.19\text{x}10^{-4}$
0.9	$2.04\text{x}10^{-4}$	$6.81\text{x}10^{-5}$
1.0	$2.65\text{x}10^{-4}$	$2.49\text{x}10^{-5}$

Momentler yönteminin uygulandığı üçüncü nonlineer diferansiyel denklem aşağıdaki gibi olsun (Yarcı, 2008).

$$y''(x) - \frac{1}{2}y^3(x) = 0$$
$$y(1) = \frac{2}{3} \quad , \quad y(3) = \frac{2}{5} \tag{18}$$

Bu problem için aranan yaklaşık çözüm

$$y = \sum_{n=0}^{4} C_n x^n \tag{19}$$

olsun sınır şartlarına göre bu çözüm

$$y(x) = \left(\tfrac{2}{3} + 2C_2 + 6C_3 + 14C_4\right) + \left(\tfrac{1}{3} - 3C_2 - 7C_3 - 15C_4\right)x + \textstyle\sum_{n=2}^{4} C_n x^n \tag{20}$$

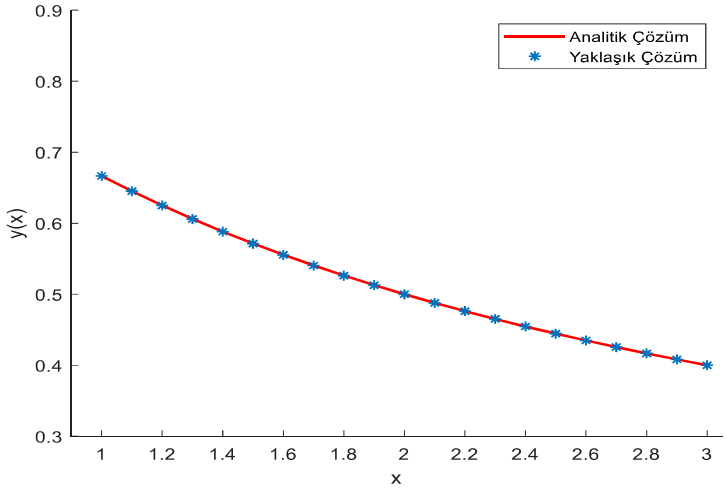
halinde olmalıdır. Denklem (20) denklem (18) de yerine yazılırsa problem için kalan

$$R(x) = -0.3502 + 0.186x + 0.1219x^2$$
$$-\tfrac{1}{2}(1.043 - 0.242x - 0.175x^2 + 0.031x^3 + 0.010x^4)^3 \tag{21}$$

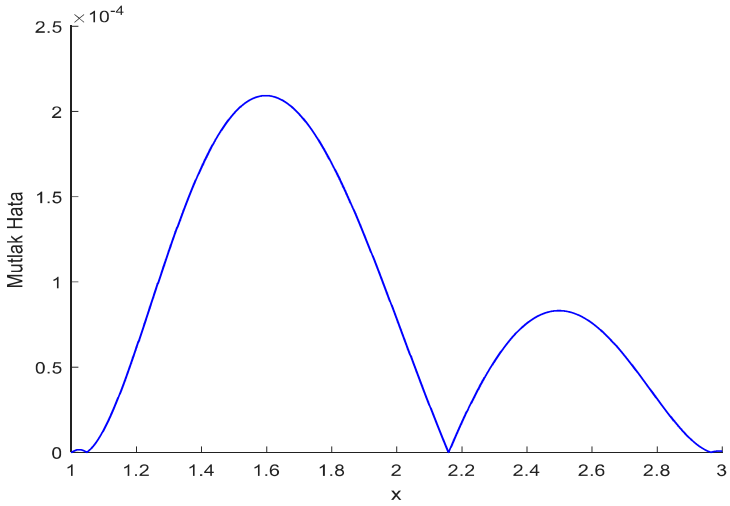
şeklinde olur. ağırlık fonksiyonları olarak sırasıyla $W_1 = x^1$, $W_2 = x^2$ ve $W_3 = x^3$ kullanılarak kurulan denklem sisteminin çözümü ile yaklaşık çözüm katsayıları hesaplanabilir. Problemin nonlineer olması birden fazla reel veya karmaşık katsayı üçlülerinin bulunmasına neden olur. En uygun yaklaşık çözüm için denklem (5) ile verilmiş olan ilk problemdeki gibi en küçük reel katsayılar seçilmelidir. Böylece denklem (18) deki problemin yaklaşık çözümü

$$y(x) = 0.9786 - 0.4233x + 0.1350x^2 - 0.025x^3 + 0.002x^4 \tag{22}$$

olacaktır. Ayrıca problemin analitik çözümü $\frac{2}{2+x}$ dir. Şekil 2 ile analitik ve yaklaşık çözüm grafik halinde verilirken çeşitli x ler için yapılmış olan mutlak hatalar Şekil 3 de gösterilmiştir.



Şekil 2: Üçüncü problem için analitik ve yaklaşık çözümler



Şekil 3: Üçüncü problemde nokta bazında yapılan mutlak hatalar

Başka bir örnek olarak sınır şartlarıyla aşağıda verilen problemi inceleyelim (Jafari ve Daftardar-Gejji, 2006).

$$y''(x) + y^2(x) = x^4 + 2 \quad , \qquad 0 < x < 1$$
$$y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 1 \tag{23}$$

Yaklaşık çözüm

$$y(x)=\sum_{n=0}^{5}C_n x^n \tag{24}$$

olsun. Sınır şartları kullanılarak katsayılar arasında

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 1-C_2-C_3-C_4-C_5 \end{aligned} \tag{25}$$

bağıntıları vardır. Buna göre denklem (24) deki yaklaşık çözüm

$$y(x)=(1-C_2-C_3-C_4-C_5)x+\sum_{n=2}^{5}C_n x^n \tag{26}$$

haline gelir. Bu ifade denklem (23) de yazılarak kalan

$$\begin{aligned} &R(x)=-2.-x^4+2C_2+6xC_3+12x^2C_4+20x^3C_5 \\ &(x^2C_2+x^3C_3+x^4C_4+x(1.-1.C_2-1.C_3-1.C_4-1.C_5)+x^5C_5)^2 \end{aligned} \tag{27}$$

şeklinde bulunur. Denklem sistemi kurularak çözülürse

$$\begin{aligned} C_2 &= 51.03 & C_2 &= 1 \\ C_3 &= -172.06 & C_3 &= 0 \\ C_4 &= 120.02 & C_4 &= 0 \\ C_5 &= -24.60 & C_5 &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

katsayıları bulunacaktır. Uygun yaklaşık çözümü veren ikinci gruptaki katsayılardır. Böylece yaklaşık çözüm x^2 olarak bulunur ve bu sonuç denklem (23) 'ün analitik çözümüdür. Ayrıca denklem (28) deki katsayılar bulunurken kullanılan ağırlık fonksiyonları sırasıyla x, x^2, x^3, x^4 tür. Yöntem sayesinde analitik çözüm bulunabilmiştir.

Yöntemi son olarak nonlineer ve değişken katsayılı bir diferansiyel denkleme uygulayalım (Yanfei vd., 2020).

$$\begin{aligned} &y''(x)-\frac{y^3-2y^2}{2x^2}=0 \\ &y(1)=1 \quad , \quad y(2)=\frac{4}{3} \end{aligned} \tag{29}$$

analitik çözüm $\frac{2x}{x+1}$ dir. Bu problemin yaklaşık çözümü olarak dördüncü dereceden bir polinom önerilir ve sınır şartları bu çözüme uygulanırsa çözüm

$$y(x) = \left(\frac{2}{3} + 2C_2 + 6C_3 + 14C_4\right) + \left(\frac{1}{3} - 3C_2 - 7C_3 - 15C_4\right)x + \sum_{n=2}^{4} C_n x^n \qquad (30)$$

olur. Bu problem için $W_1 = x$, $W_2 = x^2$ ve $W_3 = x^3$ ağırlık fonksiyonları alınarak kurulan üç bilinmeyenli üç denklemli sistemi çözülerek denklem (30) daki katsayılar bulunur. Son olarak bu katsayılar yerine yazılarak yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$y(x) = 0.1356 + 1.3709x - 0.6705x^2 + 0.1856x^3 - 0.0216x^4 \qquad (31)$$

Tablo 3 de farklı x lere karşılık gelen kesin, yaklaşık çözüm değerleri ve yapılan mutlak hatalar verilmiştir.

Tablo 3: Son problem için yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar

x	$y_{Analitik}$	$y_{yaklaşık}$	Mutlak Hata
1.0	1.00000	0.99999	$2.00\text{x}10^{-6}$
1.1	1.04761	1.04765	$3.36\text{x}10^{-5}$
1.2	1.09090	1.09099	$8.49\text{x}10^{-5}$
1.3	1.13043	1.13053	$1.02\text{x}10^{-5}$
1.4	1.16666	1.16674	$7.80\text{x}10^{-5}$
1.5	1.20000	1.20002	$2.83\text{x}10^{-5}$
1.6	1.23076	1.23074	$2.24\text{x}10^{-5}$
1.7	1.25925	1.25920	$5.21\text{x}10^{-5}$
1.8	1.28571	1.28566	$5.00\text{x}10^{-5}$
1.9	1.31034	1.31032	$2.39\text{x}10^{-5}$
2.0	1.33333	1.33332	$5.33\ \text{x}10^{-6}$

SONUÇ

Mevcut çalışmada nonlineer diferansiyel denklemler içeren problemlere Momentler yöntemiyle yaklaşık çözümler bulunmuştur. Yöntem ilk olarak incelenen problemi bir nonlineer denklem sistemine çevirir ve ardından bu denklem sistemi çözülerek yaklaşık çözüm katsayıları hesaplanır. Kullanılan ağırlık fonksiyonlarının ve yaklaşık çözümün polinom olarak alınması yöntemdeki integral hesabını kolaylıkla gerçekleştirmeye imkan verir. Momentler yöntemiyle bir problemin analitik çözümünü bulmakta mümkündür. Yöntem sonucunda meydana gelen denklem sisteminin çözüm kümeleri içerisinde reel en küçük katsayıları içerenini seçmek göz önüne alınan probleme en uygun yaklaşık çözümü vermektedir. Momentler yöntemi

çeşitli mühendislik problemlerinin yanı sıra integral, integro-diferansiyel vb. denklem veya denklem sistemlerini çözmekte kullanılabilir.

REFERANSLAR

Li, Y., Sun, N., Zheng, B., Wang, Q., and Zhang, Y. (2014). Wavelet operational matrix method for solving the Riccati differential equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *19*(3), 483–493.

Shawagfeh, N. T. (2002). Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, *131*(2-3), 517–529.

Hosseini, S.Gh. and Abbasbandy, S. (2015). Solution of lane-emden type equations by combination of the spectral method and adomian decomposition method. *Mathematical Problems in Engineering,* Volume 2015, Article ID 534754

Yarcı, H., (2008), On the Solutions of Non-Linear Boundary Value Problems , Yüksek Lisans Tezi, İzmir: Dokuz Eylül University Graduate School of Natural and Applied Sciences.

Jafari, H. and Daftardar-Gejji, V. (2006). Positive solutions of nonlinear fractional boundary value problems using Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation,* 180(2), 700-706.

Yanfei, L., Qingfei, Y., Hongyi, L., Hongli, S., Yunlei, Y. and Muzhou, H. (2020) Solving higher order nonlinear ordinary differential equations with least squares support vector machines, *Journal of Industrial And Management Optimization,* 16(3), 1481- 1502.