5th International Conference on Engineering and Applied Natural Sciences

August 25-26, 2024 : Konya, Turkey

© 2024 Published by All Sciences Academy

https://www.iceans.org/

Sınır Değer Problemlerinin Kollokasyon Çözümleri

Birkan DURAK[1*]

[1] *Elektrik ve Enerji Bölümü, İklimlendirme Soğutma Teknolojisi Programı / Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Türkiye*

[*] *(birkand@iuc.edu.tr)*

Özet – Sınır değer problemleri mühendislik, fizik, matematikte oldukça sık karşılaşılan ve sınır koşulları ile verilen diferansiyel denklemlerdir. Problemleri tanımlayan diferansiyel denklemlerin bulunan genel çözümlerine sınır şartları uygulanarak özel çözümlere ulaşılır. Elektriksel potansiyelin bulunması, titreşen sistemin normal modlarının hesaplanması, bir çubuktaki ısı dağılımının elde edilebilmesi için bu problemlerin sınır değerleri altında çözülmesi gerekir. Her ne kadar diferansiyel denklemler teorisinde çözümü elde etmek için sabit katsayılı olanlara uygulanabilecek çeşitli yöntemler varsa da değişken katsayılı denklemler için uygulanabilecek yöntemler sınırlıdır. Çalışmada iki ve daha yüksek mertebeden, sabit veya değişken katsayılı sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri kollokasyon yöntemiyle yeterli hassasiyette bulunmuştur. Kollokasyon, Ağırlıklı kalanlar yönteminde ağırlık fonksiyonu olarak dirac delta fonksiyonun kullanıldığı bir yöntemdir. Göz önüne alınan problemlere polinom şeklinde yaklaşık çözümler önerilmiştir. İntegral işareti altında dirac delta fonksiyonun özelliği sonucunda incelenen problem bir cebrik denklem sistemine dönüştürülerek çözülmüştür. Yöntemde kullanılan, deneme (test) fonksiyonlarındaki derece artışı beraberinde yaklaşık çözümde mutlak hata azalmasına getirmektedir. Değişken katsayılı diferansiyel denklemlere uygulanan sabit katsayılı hale getirme veya bunların seri çözüm önerilerindeki tekrarlama bağıntılarını bulma gibi zorlu bazen de karmaşık olabilen işlem adımlarına kollokasyon yönteminde ihtiyaç duyulmamaktadır. Kollokasyonun lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulanması sırasında önerilmiş olan yaklaşık çözümün katsayıları sanal ve/veya reel ama birden fazla olabilmektedir. Bu durumda bulunan katsayılardan en küçük reel olanlarını seçmenin araştırmacılara uygun yaklaşık çözümü vereceği belirlenmiştir. Çalışmada kollokasyon yönteminin bir sınır değer probleminin türünden bağımsız olarak ona uygulanabilecek etkili bir yaklaşık çözüm yöntemi olduğu gösterilebilmiştir.

Anahtar Kelimeler – Sınır Değer, Diferansiyel denklem, Kollokasyon Yöntemi, Ağırlıklı Kalanlar, Yaklaşık Çözüm

I. GİRİŞ

Mühendislik, fizik ve matematikte sınır koşulları ile verilen diferansiyel denklemler olan sınır değer problemleriyle oldukça sık karşılaşılır. Problemlerin onları tanımlayan diferansiyel denklemlerinin bulunan genel çözümlerine sınır şartları uygulanarak elde edilen özel çözümleri çeşitli bilim dallarında önemlidir. Özellikle mühendislikteki elektriksel potansiyelin bulunması, titreşen sistemin normal modlarının hesaplanması, bir çubuktaki ısı dağılımı için verilen problemlerin sınır değerleri altında çözülmesi gerekir. Her ne kadar diferansiyel denklemler teorisinde çözümü elde etmek için lineer ve sabit katsayılı denklemlere uygulanabilecek çeşitli yöntemler varsa da değişken katsayılı veya nonlineer olan denklemler için uygulanabilecek yöntemler fazla değildir. Bu çalışmanın ilk bölümünde kollokasyon yöntemi tanıtılacaktır. Literatürden alınan çeşitli test problemlerine yöntemin uygulanması ikinci kısmı oluşturmaktadır. Son bölümde ise yöntemin etkinliği ve uygulanırken dikkat edilmesi gereken bazı özel durumlardan bahsedilecektir.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

Kollokasyon, Ağırlıklı kalanlar yönteminde ağırlık fonksiyonu olarak $\delta(x)$ yani dirac delta fonksiyonun kullanıldığı bir yöntemdir. Göz önüne alınan problemlere polinom vb. yaklaşık çözümler önerilir. İntegral işareti altında dirac delta fonksiyonun özelliği sonucunda incelenen problem bir cebrik denklem sistemine dönüştürülür ve bu sistemin çözümü yaklaşık çözümdeki katsayıları verir.

A. Kollokasyon Yöntemi

L_d bir diferansiyel operatörü göstermek üzere bir sınır değer problem

$$\begin{aligned} &L_d[y(x)] - f(x) = 0 \\ &y(x_p) = a_1 \\ &y(x_r) = a_2 \end{aligned} \tag{1}$$

ile gösterilebilir. Burada x_p, x_r, a_1 ve a_2 ifadeleri birer reel sayıdır. Problemin yaklaşık çözümü

$$\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

olarak kabul edilsin. Denklem (2) deki çözüm denklem (1) de yerine yazılırsa kalan (residual)

$$R(x) = \; L_d[\bar{y}(x)] - f(x) = L_d\left[\sum_{n=0}^{N} C_n \varphi_n(x) \;\right] - f(x) \neq 0 \tag{3}$$

olacaktır. $R(x)$ te yer alan $\varphi_n(x)$ denklemin sınır şartlarını sağlayan herhangi bir fonksiyondur. Kollokasyon yöntemi uygulanırken (3) denklemindeki C_n katsayılarını bulmak amacıyla kalan, dirac delta fonksiyonu ile çarpılır. Denklem (1) 'in sınırlarında integre edilerek sıfıra eşitlenip bir denklem sistemi kurulur ve çözülür. Yani

$$\int_{x_p}^{x_r} R(x)\, \delta(x - x_k)\, dx = R(x_k) = 0 \tag{4}$$

işlemi uygulanır. (4) ile verilen sistemin açık hali

$$\int_{x_p}^{x_r} \left(L_d\left[\sum_{n=0}^{N} C_n \varphi_n(x) \;\right] - f(x) \right) \delta(x - x_k)\, dx = R_k(x_k) - f(x_k) = 0 \tag{5}$$

Denklem (5) 'teki x_k kollokasyon noktalarını göstermek üzere yöntem uygulanırken en basit şekilde bunların sayısı C_n katsayıların sayısına eşit alınır. x_k lar için

$$x_k = \frac{x_r - x_r}{N+1}\, k \qquad\qquad k = 1,2,3,4, \ldots,\mathrm{N} \tag{6}$$

eşitliği geçerlidir. (5) ile verilen denklemde R_k 'lar sadece C_n' lerin fonksiyonu olmaktadır. Örneğin $N = 2$ için yaklaşık çözüm

$$\bar{y}(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) \tag{7}$$

formunda olur. Bu çözüm denklem (5)'e yazılarak

$$\int_{x_p}^{x_r} \left(L_d\left[C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) \right] - f(x) \right) \delta(x - x_k)\, dx \tag{8}$$

ardından denklem (8) düzenlenirse

$$C_1\varphi_1(x_k) + C_2\varphi_2(x_k) - f(x_k) = 0 \qquad , \qquad k = 1,2 \tag{9}$$

olacaktır. Denklem (9) un matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix} \tag{10}$$

ile verilir. x_1 ve x_2 değerleri denklem (6) dan hesaplanıp yerine yazılarak bu sistem çözülür. Bulunan C_1 ve C_2 değerleri denklem (2) de yazılır. Böylece denklem (1) ile verilen sınır değer probleminin yaklaşık çözümü bulunmuş olur.

B. Yönteminin Problemlere uygulanması

Kollokasyon yöntemi öncelikle aşağıda sınır şartları ile verilen lineer sabit katsayılı diferansiyel denkleme uygulansın [1].

$$\begin{aligned} &y''(x) - y(x) = 0 \\ &y(0) = 0 \ , \ y(1) = 1 \end{aligned} \tag{11}$$

verilen bu problemin gerçek çözümü $y(x) = \frac{e}{e^2-1}(e^x - e^{-x})$ dir. yaklaşık çözümü

$$\bar{y}(x) = \sum_{n=0}^{5} C_n x^n \tag{12}$$

şeklinde bir polinom olarak kabul edilirse ve sınır şartları bu çözüme uygulandığında katsayılar arasında aşağıdaki eşitlik vardır.

$$\begin{aligned} &y(0) = 0 \ \Rightarrow \ C_0 = 0 \\ &y(1) = 1 \ \Rightarrow \ C_1 = 1 - C_2 - C_3 - C_4 - C_5 \end{aligned} \tag{13}$$

o halde denklem (12) ile verilen yaklaşık çözüm

$$\bar{y}(x) = (1 - C_2 - C_3 - C_4 - C_5)x + \sum_{n=2}^{5} C_n x^n \tag{14}$$

haline gelir. Bu çözüm (11) ile verilen diferansiyel denkleme yazılırsa kalan yani $R(x)$

$$R(x) = -x + (2 + x - x^2)C_2 + (7x - x^3)C_3 + (x + 12x^2 - x^4)C_4 + (x + 20x^3 - x^5)C_5 \tag{15}$$

şeklinde elde edilir. Denklem (13) 'e göre hesaplanması gereken dört tane yaklaşık çözüm katsayı vardır. Bu yüzden katsayılar cinsiden ifade edilen dört bilinmeyenli dört denklemden oluşan bir denklem sistemi

kurulmalıdır. Kollokasyon noktaları olarak x_1 =0.2, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, ve $x_4 = 0.8$ alınarak bu değerler denklem (15) te yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 2.16 & 1.392 & 0.6784 & 0.35968 \\ 2.24 & 2.7360 & 2.2944 & 1.6697 \\ 2.24 & 3.984 & 4.7904 & 4.8422 \\ 2.16 & 5.088 & 8.070 & 10.7123 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \tag{16}$$

denklem (16) daki gibi matris formunda yazılmış olan denklem sistemi elde edilir. Sistemin çözümüyle katsayılar sırasıyla $C_2 = -0.0002, C_3 = 0.1427, C_4 = -0.0014$ ve $C_5 = 0.0080$ olarak bulunur. Bu değerlere göre $C_1 = 0.8509$ olur. Yaklaşık çözüm ise

$$\bar{y}(x) = 0.0080x^5 - 0.0014x^4 + 0.1427x^3 - 0.0002x^2 + 0.8509x \tag{17}$$

olarak bulunacaktır. Değişken katsayılı ve tekil diferansiyel denklemlere de kollokasyon yöntemi uygulanabilir. Aşağıdaki problem göz önüne alınsın [2], [3].

$$\begin{aligned} &y''(x) - \frac{1}{x}y'(x) + y = 4 - 9x + x^2 - x^3 \\ &y(0) = 0 \ , \ y(1) = 1 \end{aligned} \tag{18}$$

Birçok uygulamalı matematik ve fizik probleminde bu tarz tekil diferansiyel denklemlere rastlanır [4]. Denklem (18) ile verilen problemin analitik çözümü $y(x) = x^2 - x^3$ olmaktadır. Yöntem uygulanırken öncelikle beşinci dereceden bir polinom önerilir ve sınır şartları dikkate alınırsa yaklaşık çözüm

$$\bar{y}(x) = (1 - C_2 - C_3 - C_4 - C_5)x + \sum_{n=2}^{5} C_n x^n \tag{19}$$

formunda olur. Bu probleme ait kalan ise (20) deki gibidir.

$$R(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x} - x + 4\right)C_2 + \left(x^3 - \frac{1}{x} + 8x\right)C_3 + \left(x^4 + 16x^2 - x - \frac{1}{x}\right)C_4 + \left(x^5 + 25x^3 - x - \frac{1}{x}\right)C_5 - 4 + 9x - x^2 + x^3 \tag{20}$$

Katsayıları verecek olan denklem sistemi

$$\begin{aligned} 1.160C_2 + 3.392C_3 + 4.558C_4 + 4.999C_5 &= -2.232 \\ 1.260C_2 + 0.764C_3 - 0.314C_4 - 1.289C_5 &= \ \ 0.496 \\ 2.093C_2 + 3.349C_3 + 3.622C_4 + 3.211C_5 &= \ \ 1.256 \\ 2.590C_2 + 5.662C_3 + 8.599C_4 + 11.077C_5 &= -3.072 \end{aligned} \tag{21}$$

olarak bulunur. Bu denklem sisteminin çözümüne göre katsayılardan $C_2 = 1$ ve $C_3 = -1$ iken geriye kalanlar ise sıfırdır. Bu katsayılar (19) da yerine yazılırsa (18) ile verilen diferansiyel denklemin kollokasyon yöntemiyle yaklaşık çözümü

$$\bar{y}(x) = x^2 - x^3 \tag{22}$$

olmaktadır. Bu çözüm problemin kesin çözümüyle aynıdır. Yöntemin başka bir uygulanması için sınır şartlarıyla verilen değişken katsayılı ve yüksek mertebeden denklem göz önüne alınsın [5].

$$y^8(x) + xy(x) = -(48 + 15x + x^3)e^x \quad , \qquad 0 < x < 1 \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &y(0)=0 && y(1)=0 \\ &y'(0)=1 && y'(1)=-e \\ &y''(0)=1 && y''(1)=-4e \\ &y'''(0)=-3 && y'''(1)=-9e \end{aligned} \tag{24}$$

Bu sınır değer probleminin kesin çözümü $x(1-x)e^x$ dir. Denklem (24) ile verilen sınır şartları kullanılarak oluşan denklem sistemindeki bilinmeyen C_4 den C_7 ye kadar olan katsayılar, diğer bilinmeyenler olan C_8, C_9 ve C_{10} katsayılarına bağlı olarak yazılabilir. Yani katsayılar arasında aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\begin{aligned} &C_0=0 && C_4=-0.331+C_8+4C_9+10C_{10} \\ &C_1=1 && C_5=-0.133-4C_8-15C_9-36C_{10} \\ &C_2=0 && C_6=-0.021+6C_8+20C_9+45C_{10} \\ &C_3=-0.5 && C_7=-0.013-4C_8-10C_9-20C_{10} \end{aligned} \tag{25}$$

Kalan hesaplanıp önceki problemlerdeki gibi işlem adımlarının ardından bulunan denklem sisteminin çözümü ile katsayılar hesaplanıp ardından yaklaşık çözüm

$$\bar{y}(x) = -0.00004x^{10} - 0.0001x^9 - 0.001x^8 - 0.006x^7 - 0.03x^6 - 0.12x^5 - 0.3x^4 - 0.5x^3 + x \tag{26}$$

şeklinde bulunur. Yöntem son olarak yüksek mertebeden değişken katsayılı lineer olmayan bir diferansiyel denkleme uygulansın. Bunun için aşağıdaki problem incelenmiştir [6].

$$\begin{aligned} &y^{(8)}(x)=e^{-x}y^2 \quad , \qquad 0<x<1 \\ &y(0)=y''(0)=y^{(4)}(0)=y^{(6)}(0)=1 \\ &y(1)=y''(1)=y^{(4)}(1)=y^{(6)}(1) \ =e \end{aligned} \tag{27}$$

Problemin kesin çözümü çözüm $y(x)=e^x$ olmaktadır. Bu probleme yaklaşık çözüm olarak dokuzuncu dereceden bir polinom önerilir ve ardından sınır şartları kullanılırsa çözümdeki tüm katsayılar C_8 ve C_9 cinsinden yazılabilir. Yönteminde iki kollokasyon noktası kullanılarak bu iki katsayı sırasıyla $C_8 = 4480.0177$, $C_9 = -332.296$ veya $C_8 = 0.00002$, $C_9 = 4.564x10^{-6}$ şeklinde bulunur. İlk iki katsayı alırsa çözüm

$$y_1(x) = -332.2x^9 + 4480x^8 - 13932x^7 + 0.0014x^6 + 43181.1x^5 + 0.0416x^4 - 84235.5x^3 + 0.5x^2 + 50840x + 1 \tag{28}$$

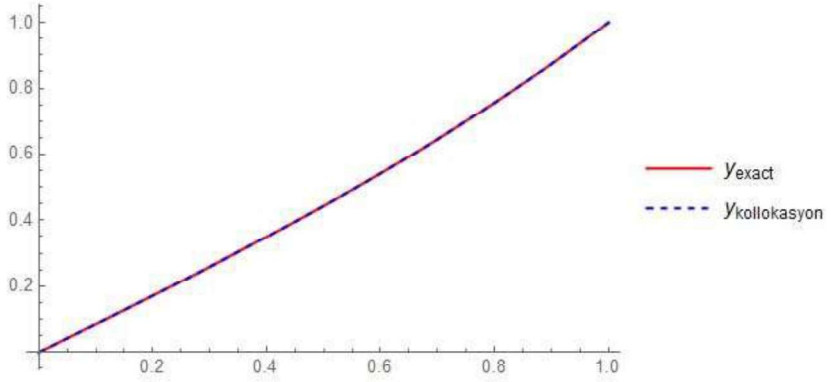
Son iki katsayının alınması durumunda yaklaşık çözüm

$$y_2(x) = 0.000004x^9 + 0.00002x^8 + 0.0002x^7 + 0.001x^6 + 0.008x^5 + 0.04x^4 + 0.2x^3 + 0.5x^2 + x + 1 \tag{29}$$

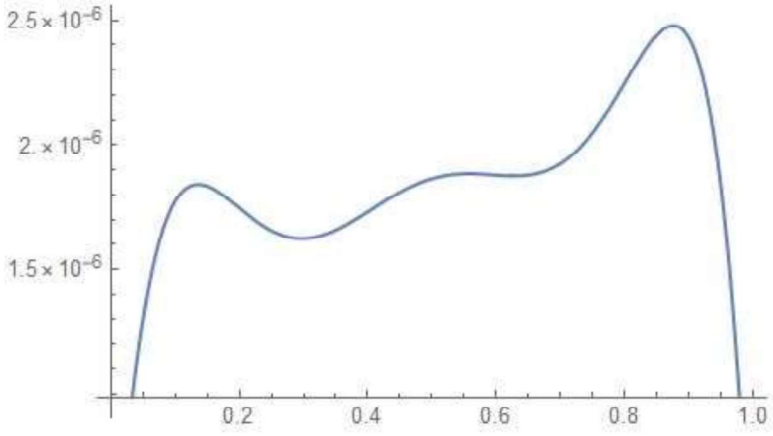
olarak bulunur.

III. BULGULAR

Sabit katsayılı sınır değer problemi olan birinci problem için kesin ve yaklaşık çözümler grafik halinde Şekil 1. İle verilmiş iken Şekil 2. İse yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatayı noktasal bazda göstermektedir.



Şekil 1. Sabit katsayılı sınır değer problemi için kesin ve yaklaşık çözümler



Şekil 2. Farklı x değerleri için yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar

Tablo 1. de incelenen üçüncü problemin kollokasyon çözümleri ve farklı x değerleri için mutlak hatalar görülmektedir.

Tablo 1. Yüksek mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemin kollokasyon çözümü ve mutlak bağıl hata değerleri

x	**Analitik**	**Kollokasyon Çözümü**	**Mutlak Hata (Ref [5].)**	**Kollokasyonda Mutlak Hata**
0.0	0.000000	0.000000	0.00000	0.0000000
0.1	0.099465	0.099465	$1.19\text{x}10^{-5}$	$1.53\text{x}10^{-12}$
0.2	0.195424	0.195424	$1.45\text{x}10^{-5}$	$4.08\text{x}10^{-11}$
0.3	0.283470	0.283470	$5.50\text{x}10^{-4}$	$1.42\text{x}10^{-10}$
0.4	0.358038	0.358038	$1.26\text{x}10^{-3}$	$1.14\text{x}10^{-10}$
0.5	0.412180	0.412180	$2.18\text{x}10^{-3}$	$1.10\text{x}10^{-10}$
0.6	0.437309	0.437309	$2.82\text{x}10^{-2}$	$2.91\text{x}10^{-10}$
0.7	0.422888	0.422888	$3.81\text{x}10^{-3}$	$2.27\text{x}10^{-10}$
0.8	0.356087	0.356087	$4.22\text{x}10^{-3}$	$5.60\text{x}10^{-11}$
0.9	0.221364	0.221364	$4.31\text{x}10^{-3}$	$2.38\text{x}10^{-12}$
1.0	0.000000	$5.20\text{x}10^{-18}$	$4.36\ 10^{-3}$	$5.20\text{x}10^{-18}$

Tablo 2. Nonlineer sınır değer probleminin iki yaklaşık çözümünü ve bunlarda yapılan mutlak hataları göstermektedir.

Tablo 2. Nonlineer sınır değer probleminde farklı C_8 ve C_9 katsayıların kullanılması durumunda yaklaşık çözümler

x	Analitik	$y_1(x)$	Mutlak Hata	$y_2(x)$	Mutlak Hata
0.0	1.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.000000
0.1	1.10517	5001.23	5000.12	1.10517	$6.80\text{x}10^{-7}$
0.2	1.22140	9508.84	9507.62	1.22140	$1.29\text{x}10^{-6}$
0.3	1.34986	13080.9	13079.6	1.34986	$1.78\text{x}10^{-6}$
0.4	1.49182	15368.3	15366.8	1.49182	$2.09\text{x}10^{-6}$
0.5	1.64872	16149.2	16147.6	1.64872	$2.20\text{x}10^{-6}$
0.6	1.82212	15350.1	15348.3	1.82212	$2.09\text{x}10^{-6}$
0.7	2.01375	13051.6	13049.6	2.01375	$1.78\text{x}10^{-6}$
0.8	2.22554	9479.76	9477.53	2.22554	$1.29\text{x}10^{-6}$
0.9	2.45960	4983.95	4981.49	2.45960	$6.83\text{x}10^{-7}$
1.0	2.71828	2.71828	$4.61\text{x}10^{-12}$	2.71828	$4.44\text{x}10^{-16}$

IV. TARTIŞMA

Birinci problem için Şekil 1. ve Şekil 2. yaklaşık çözümün kesin çözümle olan uyumunu göstermektedir. İkinci problemde kollokasyon yöntemiyle gerçek çözüm bulunabilmiştir. Tablo 1 incelendiğinde kollokasyonla bulunan değerlerdeki mutlak hatalar referans 5 in bulmuş olduklarından daha küçüktür. Tablo 2 ye göre C_8 ve C_9 katsayılarının bulunan değerlerinden en küçük gerçel (reel) olanlarının alındığı yaklaşık çözüm daha küçük hatalara sebep olmuştur.

V. SONUÇLAR

Bu çalışmada kollokasyon yöntemiyle sabit veya değişken katsayılı diferansiyel denklemlere yaklaşık çözümler bulunmuştur. Yöntemin lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulanması sırasında önerilmiş olan yaklaşık çözümün katsayıları birden fazla sanal ve/veya reel olabilmektedir. Bu durumda bulunan katsayılardan en küçük reel olanlarını seçmenin araştırmacılara uygun yaklaşık çözümü vereceği belirlenmiştir. Kollokasyon yönteminin bir sınır değer probleminin türünden bağımsız olarak ona uygulanabilecek etkili bir yaklaşık çözüm yöntemi olduğu mevcut çalışmada gösterilebilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] S. Çavuşoğlu. "Bazı sınır değer problemleri ve yaklaşım yöntemleri", Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat, 2017

[2] M. Cui, and F. Geng, "Solving singular two-point boundary value problem in reproducing kernel space." *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205 (1), 6-15., 2007. https://doi:10.1016/j.cam.2006.04.037

[3] A. S. Bataineh, A. K. Alomari, and I. Hashim, (2013). "Approximate solutions of singular two-point bvps using legendre operational matrix of differentiation." *Journal of Applied Mathematics*, Volume 2013, Article ID 547502., 2013.https://doi.org/10.1155/2013/547502

[4] H. Allouche, and A. Tazdayte, "Numerical solution of singular boundary value problems with logarithmic singularities by Padé approximation and collocation methods." Journal of Computational and Applied Mathematics, 311(2017), 324-341. , 2017. https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.08.003

[5] R. B Ogunrinde,. and O. M. Ojo, (2018). "Application of differential transformation method to boundary value problems of order seven and eight." *American Journal of Computational Mathematics*, 8 (3), 269-278. , 2018. https://doi.org/10.4236/ajcm.2018.83022

[6] M. A. Noor, and T. S. Mohyud-Din, (2007). "Variational iteration decomposition method for solving eighth-order boundary value problems." *Differential Equations and Nonlinear Mechanics,* Volume 2007, Article ID 19529., 2017. https://doi:10.1155/2007/19529