LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN BULUNMASINDA GALERKİN YÖNTEMİ

Dr. Birkan DURAK

ORCID: 0000-0002-8196-5407

birkand@iuc.edu.tr

İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu,
Elektrik Ve Enerji Bölümü, İklimlendirme Soğutma Teknolojisi Programı, İstanbul, Türkiye

Özet

Fizik, kimya, mühendislik, biyoloji ve ekonomi alanlarında oluşturulan matematiksel modeller genellikle diferansiyel denklem şeklinde verilirler. Bu denklemlerdeki, fonksiyonlar genellikle fiziksel ya da finansal değerleri, bunların türevleri ise bu değerlerin değişim hızlarını ifade eder. Bazı durumlarda incelenen probleme bağlı olarak diferansiyel denklemin çözümü bilinen fonksiyonlar cinsinden ifade edilemeyebilir. Çözümü var olan denklemler için ise çözüm daha sonra yapılacak olan hesaplamalar için kullanışlı olmayabilir. Bazı tür diferansiyel denklemler için ise mevcut yöntemlerle çözüme ulaşmak mümkün değildir. Özellikle lineer olmayan denklemlerde ya çözümü bulmak için fazla bir hesaplama yapılması gerekir ya da bunlar için bilinen yöntemler yetersiz kalır. Bu yüzden sayısal analizdeki yaklaşık çözüm yöntemleriyle lineer olmayan bir diferansiyel denkleme çözüm aramak önemlidir.

Çalışmada lineer olmayan diferansiyel denklemlere yaklaşık çözümler bulabilmek için Galerkin yöntemi kullanılmıştır. Ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden birisi olan Galerkin yöntemi yaklaşık çözüm için problemin sınırları içerisinde bir integral işlemini kullanır. Bu işlem sayesinde problemin çözümü amacıyla kurulan denklem sistemi ise bilinen yöntemlerle hesaplanır ve ardından yaklaşık çözüm bulunur. Yöntemin lineer olmayan problemlere uygulanması sonucunda bulunan ve yaklaşık çözümde kullanılacak olan katsayıların seçiminin nasıl yapılacağı, deneme fonksiyonun derece artışının mutlak hataya olan etkisi çalışmada incelenmiştir. Literatürden seçilen problemlere Galerkin yöntemiyle yeterli hassasiyette yaklaşık çözümler bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Nonlineer, Diferansiyel denklem, Galerkin Yöntemi, Yaklaşık Çözüm

GALERKİN METHOD IN FINDING APPROXIMATE SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract

Mathematical models created in the fields of physics, chemistry, engineering, biology and economics are usually given in the form of differential equations. In these equations, the functions usually represent physical or financial values, and their derivatives represent the rates of change of these values. Sometimes, depending on the problem being examined, the solution of the differential equation may not be expressed in terms of known functions. It is not always the case that a solution of an equation will prove useful in subsequent calculations. For some types of differential equations, it is not possible to reach a solution with existing methods. Especially for nonlinear equations, either a lot of calculations need to be made to find the solution or known methods are insufficient for them. Therefore, it is important to seek a solution to a nonlinear differential equation with approximate solution methods in numerical analysis.

In the study, the Galerkin method was employed for find approximate solutions to nonlinear differential equations. The Galerkin method, which belongs to the class of weighted residual methods, employs an integral operation within the boundaries of the problem in order to obtain an approximate solution. Thanks to this process, the equation system established for the purpose of solving the problem is calculated with known methods and then an approximate solution is found. How to choose the coefficients that will be used in the approximate solution and found as a result of the application of the method to nonlinear problems, and the effect of the degree increase of the trial function on the absolute error are examined in the study. Approximate solutions with sufficient precision were found for the problems selected from the literature with the Galerkin method.

Keywords: Nonlinear, Differential Equation, Galerkin Method, Approximate Solution.

GİRİŞ

Fizik ve mühendislikte matematiksel modeller diferansiyel denklemlerle ifade edilirler. Bu denklemlerin çözümü incelenen problemin daha kolay anlaşılmasını sağlar. Ancak bazı durumlarda probleme bağlı olarak denklemin çözümü bilinen fonksiyonlar cinsinden ifade edilemeyebilir veya hesaplamalarda kullanışsız olur. Özellikle lineer olmayan denklemler için ya çözümü bulmak oldukça zahmetli işlemleri gerektirir ya da bunlar için bilinen yöntemler yetersiz kalır. Bu yüzden sayısal analizdeki yaklaşık çözüm yöntemleriyle lineer olmayan bir diferansiyel denkleme çözüm aramak önemlidir. Çalışmanın ilk kısmında Galerkin yöntemi tanıtılmıştır. İlerleyen bölümlerde önce test problemleri incelenmiştir, son olarak yöntem ve etkinliği tartışılmıştır.

MATERYAL VE METHOD

L_n bir nonlineer operatör olmak üzere, nonlineer ve homojen olmayan bir diferansiyel denklem sınır şartlarıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} &L_n y(x) = f(x) \\ &y(x_1) = a \\ &y(x_2) = b \end{aligned} \tag{1}$$

Burada x_1, x_1, a ve b ifadeleri reel sayıdır. Bu denklemin yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=0}^{N} C_i \Psi_i = C_0\Psi_0 + C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2 + \cdots + C_N\Psi_N \tag{2}$$

şeklinde olsun. Eşitlik (2) ile verilen yaklaşık çözüm denklem (1) de yerine yazılırsa Galerkin yönteminde kullanılacak olan kalan

$$R(x) = L_n(\sum_{i=0}^{N} C_i\Psi_i) - f(x) \tag{3}$$

olarak bulunur. Denklem (3) ile verilen kalan sıfır değildir. Bu denklemdeki Ψ_i ifadesi problemin sınır koşullarını sağlayan deneme (test) fonksiyonları iken C_i 'ler yaklaşık çözümdeki katsayılarıdır. Kalan ağırlık fonksiyonu olan $W_i(x) = \frac{\partial \tilde{y}(x)}{\partial C_i}$ ile çarpılarak problemin sınırlarında integre edilerek sıfıra eşitlenirse meydana gelecek denklem sisteminin çözümü ile bilinmeyen katsayılar hesaplanabilir.

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x)W_i(x)dx = \sum_{i=0}^{N} \int_{x_1}^{x_2} [C_i\Psi_i\Psi_i - f(x)]dx = 0 \quad (4)$$

Denklem (4), NxN boyutlu bir denklem sistemini vermektedir. Galerkin yöntemini ilk olarak aşağıda verilen denkleme uygulayalım (Yarcı 2008).

$$y''(x) - \frac{1}{2}y^3(x) = 0$$
$$y(1) = \frac{2}{3} \quad , \quad y(3) = \frac{2}{5} \quad (5)$$

Verilen problemin çözümü $2/(2 + \mathrm{x})$ dir. Bu denklemin yaklaşık çözümü için aşağıdaki form kabul edilsin

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=0}^{4} C_i\Psi_i \quad (6)$$

Bu çözüme problemin sınır şartları uygulanırsa katsayılar arasındaki ilişki ile yaklaşık çözümün

$$\tilde{y}(x) = (\frac{4}{5} + 3C_2 + 12C_3 + 39C_4) + (-\frac{2}{15} - 4C_2 - 13C_3 - 40C_4)x + \sum_{i=0}^{4} C_i x^i \quad (7)$$

şeklinde olacağı görülür. Denklem (7), denklem (5)' e yazılarak kalan

$$R(x) = 2C_2 + 6xC_3 + 12x^2C_4 - \frac{1}{2}(\frac{4}{5} + 3C_2 + x^2C_2 + 12C_3 + x^3C_3 + x(-\frac{2}{15} - 4C_2 - 13C_3 - 40C_4) + 39C_4 + x^4C_4)^3 \quad (8)$$

Burada bilinmeyen C_2, C_3, C_4 katsayıları bulunarak yaklaşık çözüm tamamlanır. Bunun için problemde kullanılacak ağırlık fonksiyonları yazılırsa

$$W_2(x) = \frac{\partial\tilde{y}(x)}{\partial C_2} = 3 - 4x + x^2 \ , W_3(x) = \frac{\partial\tilde{y}(x)}{\partial C_3} = 12 - 13x + x^3 \ , W_4(x) = \frac{\partial\tilde{y}(x)}{\partial C_4} = 39 - 40x + x^4 \quad (9)$$

olur. Bilinmeyen katsayıları verecek olan üç denklem

$$\int_1^3 R(x)W_i(x)dx = 0 \quad , \quad i = 2,3,4 \quad (10)$$

ile verilen denklemle bulunur. Üç bilinmeyenli üç denklemli bu sistemin çözümü ile $C_2 = 0.1347,\ C_3 = -0.0259,\ C_4 = 0.0021$ olarak bulunur. Bu değerler denklem (7) deki ilk iki terime yazılarak diğer iki katsayı $C_0 = 0.9774$ ve $C_1 = -0.4217$ şeklinde olur. Buna göre yaklaşık çözüm

$$\tilde{y}(x) = 0.9774 - 0.4217x + 0.1347x^2 - 0.0259x^3 + 0.0021x^4 \quad (11)$$

İkinci test problemi olarak diğer bir sınır değer problemi göz önüne alınsın (Yafei vd. 2020).

$$y''(x) - \frac{y^3 - 2y^2}{2x^2} = 0$$
$$y(1) = 1 \quad , \quad y(2) = \frac{4}{3} \quad (12)$$

Şeklinde olsun bu problemin çözümü $2x/(x+1)$ dir. Bu problemin yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=0}^{4} C_i x^i \quad (13)$$

olsun. İlk problemdeki işlem adımları izlenirse bulunan yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi olacaktır

$$\tilde{y}(x) = 0.138587 + 1.36549\,x - 0.667933x^2 + 0.18577x^3 - 0.0219169\,x^4 \quad (14)$$

Yöntem başlangıç değer problemlerine de uygulanabilir (Herman ve Saravi 2016).

$$y'(x) + y^2 = 0$$
$$y(0) = 1$$

Gerçek çözüm $y(x) = \frac{1}{(1+x)}$ dir. $0 < x < 1$ olmak üzere bu başlangıç değer probleminin, sınır şartını sağlayan yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{5} C_i x^i \tag{15}$$

olur. Buna göre yaklaşık çözümün katsayıları aşağıdaki gibi birden fazla değer almaktadır.

$$\begin{aligned} C_1 &= -56.619540716124746 & C_1 &= -0.9941710313689817 \\ C_2 &= 393.9266167085388 & C_2 &= 0.9390897991556956 \\ C_3 &= -1075.6407757603101 & C_3 &= -0.7351035781474247 \\ C_4 &= 1245.3166318130302 & C_4 &= 0.38054588760643954 \\ C_5 &= -520.219135713616 & C_5 &= -0.09032271159484774 \end{aligned} \tag{16}$$

Bu iki katsayı setinden reel en küçük olanlarının yer aldığı ikinci grup seçilirse problemin uygun yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}_{galerkin1}(x) = 1 - 0.9941710313689817x + 0.9390897991556956x^2 - 0.7351035781474247x^3 + 0.38054588760643954x^4 - 0.09032271159484774x^5 \tag{17}$$

olarak bulunur. Diğer katsayıların alındığı yaklaşık çözüm (18) ile verilmiştir.

$$\tilde{y}_{galerkin2}(x) = 1 - 56.619540716124746x + 393.9266167085388x^2 - 1075.6407757603101x^3 + 1245.3166318130302x^4 - 520.219135713616x^5 \tag{18}$$

Son olarak aşağıdaki problemi inceleyelim. (Hosseini ve Abbasbandy 2015).

$$\begin{aligned} &y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + y^5 \\ &y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Gerçek çözüm

$$y_{gerçek} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}} \tag{20}$$

olmaktadır. $0 < x < 1$ olmak üzere bu başlangıç değer problemin yaklaşık çözümü sınır şartları dikkate alınarak

$$\tilde{y}(x) = (1) + \sum_{i=2}^{3} C_i x^i \tag{21}$$

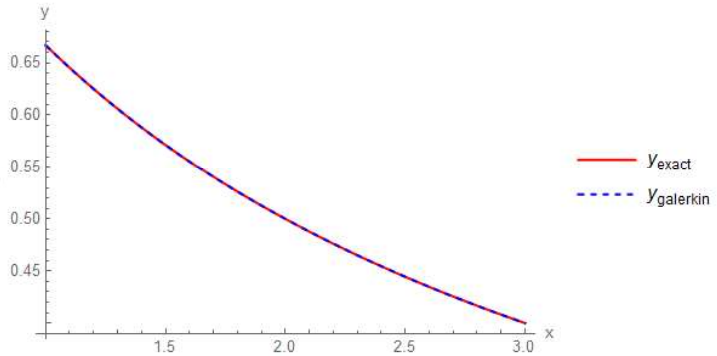
Galerkin yöntemindeki işlem adımları uygulanarak aranan yaklaşık çözüm

$$\tilde{y}(x) = 1 - 0.18775256234728788x^2 + 0.053297207385286344x^3 \tag{22}$$

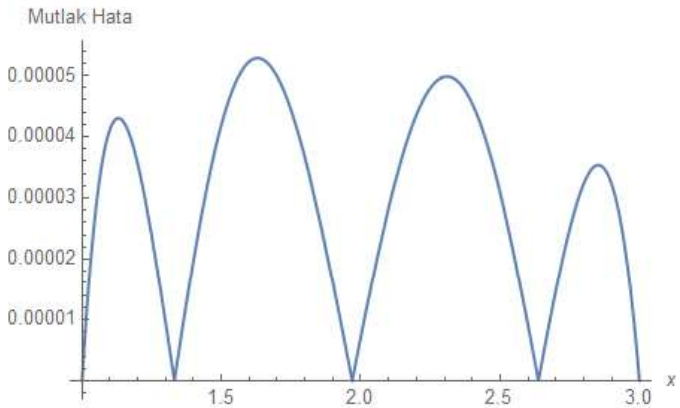
şeklinde bulunur. Uygun yaklaşık çözüm için katsayılardan en küçük reel olanları alınmıştır.

BULGULAR

Birinci test problemi için Şekil 1 de yaklaşık çözüm ve gerçek çözüm çizdirilmiştir. Şekil 2 de ise mutlak hatalar görülmektedir.

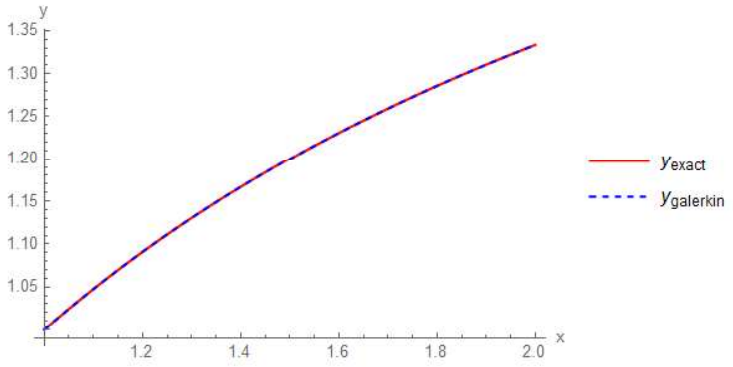


Şekil 1. Sınır değer problemi için çözümler



Şekil 2. Nokta bazında yapılan mutlak hatalar

Denklem (14) ile verilen ikinci problemin yaklaşık çözümünde yapılan mutlak hatalar Tablo 1 de görülmektedir. Şekil 3 te ise her iki çözüm çizdirilmiştir.

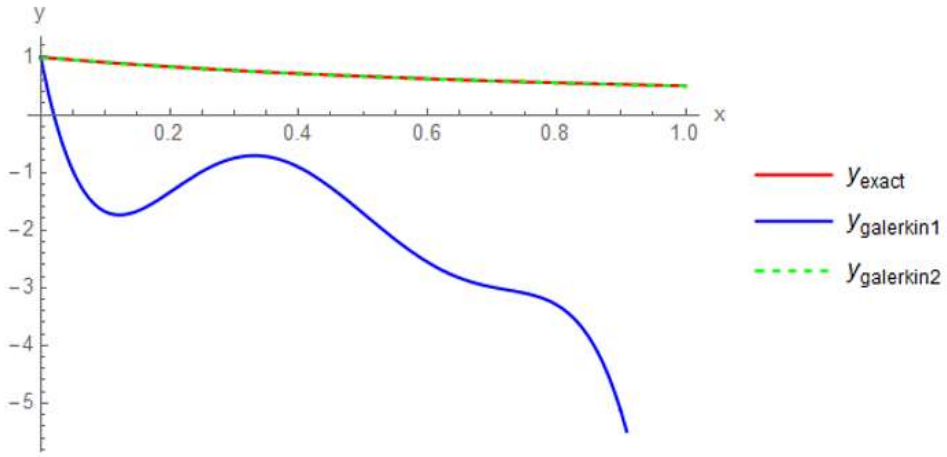


Şekil 3. İkinci problem için gerçek ve yaklaşık çözüm

Tablo 1. İkinci sınır değer problemin mutlak hata değerleri

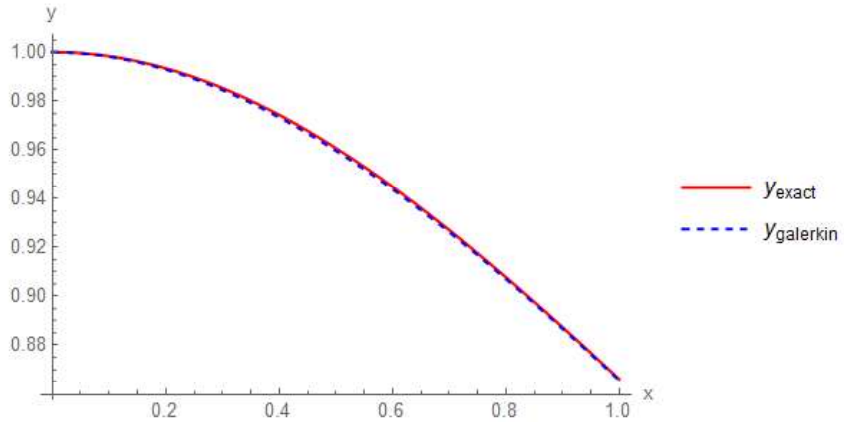
x	$y_{gerçek}$	$y_{galerkin}$	$\lvert y_{gerçek} - y_{galerkin} \rvert$
1.0	1.00000	1.00000	2.22045×10^{-16}
1.1	1.04762	1.04760	0.0000173449
1.2	1.09091	1.09092	9.79262×10^{-6}
1.3	1.13043	1.13046	0.0000264758
1.4	1.16667	1.16669	0.0000192761
1.5	1.20000	1.20000	2.54869×10^{-6}
1.6	1.23077	1.23075	0.0000215325
1.7	1.25926	1.25924	0.0000232619
1.8	1.28571	1.28571	5.22436×10^{-6}
1.9	1.31034	1.31036	0.0000161752
2.0	1.33333	1.33333	2.22045×10^{-16}

Üçüncü problem için Şekil 4 te bulunan iki yaklaşık çözüm grafik olarak verilmiştir. Katsayıların büyük olduğu çözümün gerçek çözümden uzaklaştığı görülmektedir.

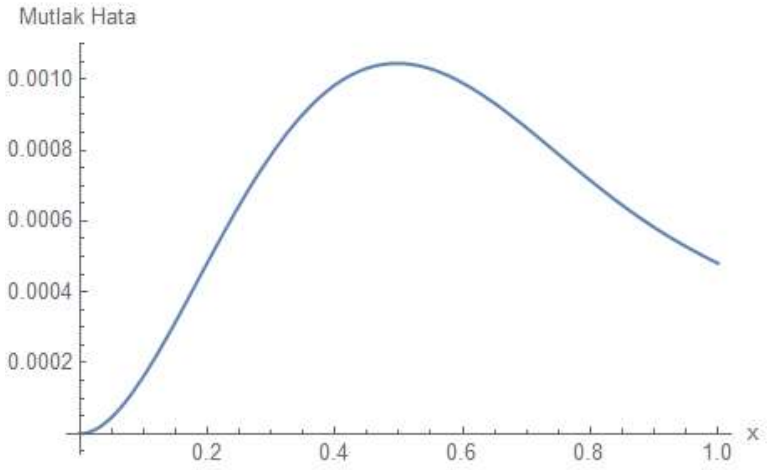


Şekil 4. Üçüncü problemde yaklaşık çözümlerin gerçek çözümlerle karşılaştırılması

Son problem için Şekil 5 te çözümler ve Şekil 6 da nokta bazında yapılan mutlak hatalar görülmektedir.



Şekil 5. Dördüncü problem için yaklaşık ve gerçek çözümler



Şekil 6. Son problemde hesaplamalar sırasında nokta bazında mutlak hatalar

SONUÇ

Çalışmada Galerkin yöntemi sabit ve değişken katsayılı lineer olmayan sınır değer ve başlangıç değer problemlerine uygulanmıştır. Literatürden seçilerek incelenen bu problemler yöntem sayesinde bir denklem sistemi haline getirilerek yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Galerkin yönteminde her ne kadar deneme (test) fonksiyonun seçiminde serbest olunsa da integrallerin kolay alınması için basit polinomları kullanmak tercih edilmiştir. Bazı problemlerde yaklaşık çözümdeki katsayılar birden fazla gerçel veya sanal değer almamaktadır. Bu durumda uygun yaklaşık çözüm için bunların en küçük reel olanları seçilmelidir. Yaklaşık çözüm için kullanılan deneme fonksiyonlarının derecesinin artışı yapılan mutlak hatada azalmayı sağlamaktadır.

KAYNAKÇA

Yarcı, H. (2008). *On the solutions of non-linear boundary value problems.* M.S. Dissertation, İzmir: Dokuz Eylül University, Turkey

Yanfei, L., Qingfei Y., Hongyi, L., Hongli, S., Yunlei, Y., Muzhou, H,. (2020). "Solving higher order nonlinear ordinary differential equations with least squares support vector machines", Journal of Industrial And Management Optimization, 16(3), 1481-1502.https://doi.org/10.3934/jimo.2019012

Hermann, M. and Saravi, H. (2016). *Nonlinear ordinary differential equations : Analytical Approximation and Numerical Methods (1 st ed.)*. Springer India.

Hosseini, S.Gh. and Abbasbandy, S. (2015). "Solution of lane-emden type equations by combination of the spectral method and adomian decomposition method". Mathematical Problems in Engineering, Volume 2015, Article ID 534754 https://doi.org/10.1155/2015/534754