LİNEER VOLTERRA VE FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİ İÇİN KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Collocation Method for Linear Volterra and Fredholm Integral Equations

Öğr.Gör.Dr., Birkan DURAK

İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

ORCID ID 0000-0002-8196-5407

Öğr.Gör.Dr., Hüseyin YILDIZ

İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

ORCID ID 0000-0002-0575-3904

Özet **–**Mühendislik ve uygulamalı bilim dallarındaki bazı problemler veya çözümleri integral işareti altındaki denklemlerle ifade edilirler. Bu denklemler integral denklem olarak adlandırılır. Diferansiyel denklemlerle İntegral denklemler yakın ilişkilidir. Bu yüzden çözümü zor olan diferansiyel denklemleri integral denkleme çevrilerek çözmek mümkün olur. Bazı sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak amacıyla uygulanan yöntemlerde İntegral denklemlerden faydalanılır. İncelenen integral denklemin türüne göre farklı analitik çözümler geliştirilmiştir. Bazı durumlarda problemden kaynaklı olarak integral denklemin çözümünün bilinen elemanter fonksiyonlarla gösterilmesi mümkün olmaz. Bu yüzden sayısal çözüm yöntemleri dinamik, elastisite, akışkanlar mekaniği vb. alanlardaki problemlerde kullanılırlar.

Bu çalışmada Lineer Volterra ve Fredholm integral denklemlerinin bazı türleri için bir yaklaşık çözüm yöntemi sunulmuştur. Kollokasyon yöntemiyle incelenen lineer problemlere polinom temelli yaklaşık çözümler bulunmuştur. Yöntem Analitik çözüm veya diğer yaklaşık çözümlerdeki gibi uzun ve karmaşık işlem adımlarına gerek duymamaktadır. Problem bağımsız değişkenin sınırları içerisinde keyfi alınan noktaların sayısı kadar denkleme sahip bir sisteme indirgenerek çözülmektedir. Bulunan bu yaklaşık çözümdeki katsayılar denklem sisteminin çözümünden gelmektedir. Seçilen polinomun derecesi arttırılırsa denklem sisteminin boyutu artmaktadır.

Bu yöntem sayesinde literatürden seçilen örneklerin yaklaşık çözümünde yapılan noktasal mutlak hata çok küçük olmaktadır. Kollokasyon yönteminde kullanılan polinomun derecesinin artışıyla beraber yaklaşık çözümde bu hata istenilen kadar azaltılabilmektedir. Kollokasyon yöntemi araştırmacılara basit programlama algoritmalarıyla İntegral veya İntegro diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulma şansı vermektedir.

Anahtar Kelimeler : Fredholm, İntegral Denklem, Kollokasyon, , Volterra, Yaklaşık Çözüm

Abstract **–** In engineering and applied sciences, some problems or solutions are expressed with equations under the integral sign. These equations are called integral equations. Integral equations are closely related to differential equations. Therefore, it is possible to solve differential equations, which are difficult to solve, by converting them into integral equations. Integral equations are used in the methods applied to find approximate solutions of some boundary value problems. Different analytical solutions have been developed according to the type of integral equation studied. In some cases, due to the problem, it is not possible to show the solution of the integral equation with known elementary functions. So numerical solution methods are used in dynamics, elasticity, fluid mechanics, etc. used in field problems.

In this study, an approximate solution method is presented for some types of linear Volterra and Fredholm integral equations. Polynomial-based approximate solutions have been found for linear problems analyzed by the collocation method. The method does not require long and complex processing steps as in analytical solutions or other approximate solutions. The problem is solved by reducing it to a system that has as many equations as the number of arbitrary points within the boundaries of the independent variable. The coefficients in this approximate solution come from the solution of the system of equations. If the degree of the chosen polynomial is increased, the size of the equation system increases.

Thanks to this method, the point absolute error in the approximate solution of the examples chosen from the literature is very small. With the increase of the degree of the polynomial used in the collocation method, this error in the approximate solution can be reduced as much as desired. The collocation method gives researchers the chance to find approximate solutions of integral or integral differential equations with simple programming algorithms.

Keywords : Fredholm, İntegral Equation, Collocation, Volterra, Approximate Solution

GİRİŞ

Mühendislik ve uygulamalı bilim dallarındaki bazı problemler veya çözümleri integral işareti altındaki denklemlerle ifade edilirler. Bu denklemler integral denklem olarak adlandırılır.

Diferansiyel denklemlerle integral denklemler yakın ilişkilidir. Bu yüzden çözümü zor olan bir diferansiyel denklemi integral denkleme çevirerek çözmek mümkün olur. Bazı sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak amacıyla uygulanan yöntemlerde de integral denklemlerden faydalanılır.

İncelenen integral denklemin türüne göre farklı analitik çözümler geliştirilmiştir. Bazı durumlarda problemden kaynaklı olarak integral denklemin çözümünün bilinen elemanter fonksiyonlarla gösterilmesi mümkün olmaz. Bu yüzden integral denklem için sayısal çözüm yöntemleri tercih edilir. Özellikle dinamik, elastisite, akışkanlar mekaniği vb. alanlardaki problemlerde sayısal yöntemler kullanılır.

Volterra integral denklemlerin (VID) sayısal çözümleri için uygulanan bazı yöntemler Diferansiyel Transform Metodu (DTM) [1],[2], Radial Basis Function [3], Bernstein polinomları yöntemi [4] ve Vandermonde Lagrange interpolasyonudur [5]. Fredholm integral denklemleri için bölünmüş farklar interpolasyonu yöntemi uygun sonuçlar vermektedir [6]. Birleşik Laplace-Adomian's Ayrıştırma Yöntemi (LADM) ile Hilbert çekirdekli iki boyutlu Volterra-Fredholm integral denklemlerin yaklaşık çözümleri bulunabilir [7].

MATERYAL VE YÖNTEM

Kollokasyon yöntemi bir integral denkleme yaklaşık çözüm bulmakta kullanılırken öncelikle aranan çözümün bir polinom olduğu kabul edilir. Bu yaklaşık çözüm integral denklemde yerine yazılarak kalan meydana getirilir. Bu kalanın keyfi alınan kollokasyon noktalarında sıfıra eşitlenmesi durumunda bir denklem sistemine ulaşılacaktır. Bu denklem sisteminin çözümüyle integral denklemin yaklaşık çözümündeki katsayılar bulunur. Böylece aranan yaklaşık çözüm tamamlanmış olur. Yöntemin integral denklemlere uygulanması için birinci örnek olarak

$$y(x)=x-\int_0^x \mathrm{Sinh}\,(x-t)y(t)dt \tag{1}$$

şeklinde verilen ve çözümü x-x36 olan Volterra integral denklemini göz önüne alalım [8].

(1) ile verilen bu denklemin yaklaşık çözümü

$$y(x)=\sum_{n=1}^{10} C_n x^n \tag{2}$$

olsun. (2) ile verilen bu yaklaşık çözüm (1) nolu denklemde yazılarak kalan

$$R(x)=\sum_{n=1}^{10} C_n x^n - x + \sum_{n=1}^{10} C_n \left(\int_0^x t^n \sinh(x-t)\mathrm{d}t\right) \tag{3}$$

olarak bulunacaktır. Kalan denklemindeki Cn katsayılarının bulunması ile (2) ile verilen yaklaşık çözüm bulunmuş olur. Bu amaçla (3) ile verilen kalan xi olarak adlandırılan kollokasyon noktalarında sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi meydana getirilmelidir. Bu denklem sisteminin kapalı formu

$$R(x_i)=0 \qquad i=1,2,3,.....,N \tag{4}$$

olmaktadır. (4) ile verilen denklem sisteminde N kollokasyon nokta sayısını göstermektedir. xi∈(0,1) olduğu kabul edilirse (4) de kullanılacak kollokasyon noktaları için

$$x_i=\frac{i}{N+1} \qquad i=1,2,3,.....,N \tag{5}$$

eşitliği geçerlidir. (5) ile verilen kollokasyon noktaları (3) te yazılarak (4) ile gösterilen denklem sisteminin çözümünden (2) denklemindeki katsayılar

$$C_1 = 0.99 \qquad C_2 = 1.60\times10^{-13} \qquad C_3 = -0.166$$
$$C_4 = 1.31\times10^{-11} \quad C_5 = -5.19\times10^{-11} \quad C_6 = 1.28\times10^{-10}$$
$$C_7 = -2.02\times10^{-10} \quad C_8 = 1.95\times10^{-10} \quad C_9 = -1.04\times10^{-10}$$
$$C_{10} = 2.40\times10^{-11} \tag{6}$$

olmaktadır. Katsayıların hesabı sırasında N=10 alınmıştır. Bu katsayılar yerlerine yazılırken çok küçük katsayılar alınmazsa (1) ile verilen integral denklemin yaklaşık çözümü

$$y(x) = 0.999x - 0.166x^3 \tag{7}$$

olacaktır. Kollokasyon yönteminin Fredholm integral denklemine uygulanması için aşağıda verilen ikinci problem incelensin

$$y(x) = e^{-x} - \int_0^1 x\, e^t\, y(t)\, dt \tag{8}$$

burada x∈[0,1] ve problemin çözümü e-x-x2 dir [9]. y0=1 olduğuna dikkat edilerek bu problem için

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{10} C_n x^n \tag{9}$$

formunda bir yaklaşık çözüm aranıyor olsun. (9) ile verilen yaklaşık çözüm (8) de yerine yazılır ve düzenlenirse kalan

$$R(x) = \sum_{n=1}^{10} C_n x^n - \mathrm{e}^{-x} + x\int_0^1 \mathrm{e}^t \left(1 + \sum_{n=1}^{10} C_n t^n\right) \mathrm{d}t \tag{10}$$

olur. Bu denklemden faydalanarak kurulan denklem sistemlerinin çözümleri sırasıyla

$$y_{10} = 1 - 1.49x + 0.49x^2 - 0.16x^3 + 0.041x^4 - 0.008x^5 + 0.001x^6 - 0.0001x^7 + 0.00002x^8 - 0.000002x^9 + 1.75\times10^{-7}x^{10} \quad (11)$$

$$y_{15} = 1 - 1.49x + 0.50x^2 - 0.16x^3 + 0.04x^4 - 0.008x^5 + 0.001x^6 - 0.0002x^7 + 0.00003x^8 - 0.00002x^9 + 0.00004x^{10} - 0.00004x^{11} + 0.00003x^{12} - 0.00001x^{13} + 0.000005x^{14} - 7.8\times10^{-7}x^{15} \quad (12)$$

yaklaşık çözümleri verecektir. (11) deki çözüm için 10 adet kollokasyon noktası alınmışken (12) deki çözüm için alınan nokta sayısı 15 tir. Son olarak yönetimi Volterra-Fredholm integral denkleme uygulayalım.

$$y(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)y(t)dt + \int_0^2 (xt)y(t)dt \quad (13)$$

Bu denklem fx=2cos x -xcos2-2xsin2+x-1de olarak alınırsa çözüm yx=cos (x) olarak bulunur [10].

(13) ile verilen denklemin yaklaşık çözümü

$$y(x) = \sum_{n=0}^{9} C_n x^n \quad (14)$$

(14) deki ifade denklem (13) te yerine yazılarak düzenlenirse integral denklem için kalan

$$R(x) = \sum_{n=0}^{9} C_n x^n - 2\cos[x] + x\cos[2] + 2x\sin[2] - x + 1 - \int_0^x \left((x-t)\left(\sum_{n=0}^{9} C_n t^n\right)\right)dt - \int_0^2 \left((xt)\left(\sum_{n=0}^{9} C_n t^n\right)\right)dt \quad (15)$$

olacaktır. (15) ile verilen kalan 10 adet kollokasyon noktasında sıfıra eşitlenerek bulunan denklem sisteminin çözümüyle (14) ile verilen yaklaşık çözümün katsayıları hesaplanıp yerine yazılırsa yaklaşık çözüm

$$y(x) = 1.0 - 3.8\times10^{-7}x - 0.49x^2 - 0.000009x^3 + 0.04x^4 - 0.00003x^5 - 0.001x^6 - 0.00002x^7 + 0.00003x^8 - 0.000002x^9 \quad (16)$$

şeklinde bulunacaktır.

BULGULAR

Tablo 1 de birinci problem olarak incelenen Volterra integral denklemin analitik ve yaklaşık çözümü farklı x değerleri için verilmiştir.

Tablo1. Volterra integral denkleminin kesin ve kollokasyon çözümleri

x	Analitik çözüm	Kollokasyon çözümü	Nokta bazında yapılan Mutlak Hata
0.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.1	0.0998333	0.0998333	$1.38x10^{-17}$
0.2	0.1986670	0.1986670	$5.55x10^{-17}$
0.3	0.2955000	0.2955000	$5.55x10^{-17}$
0.4	0.3893330	0.3893330	$1.11x10^{-16}$
0.5	0.4791670	0.4791670	$1.11x10^{-16}$
0.6	0.5640000	0.5640000	$2.22x10^{-16}$
0.7	0.6428330	0.6428330	$2.22x10^{-16}$
0.8	0.7146670	0.7146670	0.0000000
0.9	0.7785000	0.7785000	$1.11x10^{-16}$
1.0	0.8333330	0.8333330	$5.77x10^{-15}$

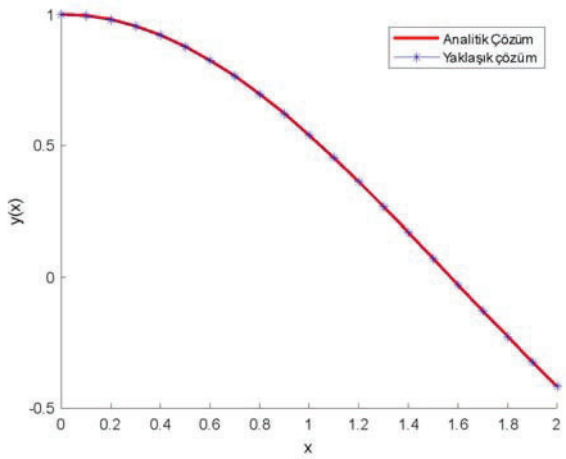
Tablo 2 de Fredholm integral denkleminin farklı kollokasyon noktaları alınması durumunda bulunan yaklaşık çözümlerdeki noktasal bazda yapılan en büyük mutlak hata değerleri görülmektedir.

Tablo 2. Fredholm integral denklemin yaklaşık çözümünde yapılan maximum hatalar

Kollokasyon Nokta Sayısı	Maximum Mutlak Hata (x = 1.00)
1	$1.20x10^{-1}$
2	$1.92x10^{-2}$
3	$2.14x10^{-3}$
4	$1.79x10^{-4}$
5	$1.22x10^{-5}$
6	$6.99x10^{-7}$
7	$3.46x10^{-8}$

8	$1.50x10^{-9}$
9	$5.86x10^{-11}$
10	$2.00x10^{-12}$

Şekil 1 de üçüncü problem olarak incelediğimiz Volterra-Fredholm integral denkleminin analitik ve yaklaşık çözümü grafik halinde verilmiştir.



Şekil 1. Volterra-Fredholm integral denkleminin analitik ve yaklaşık çözümleri

Tablo 3. ile en son incelenen integral denklemde yapılan mutlak hatalar verilmiştir.

Tablo 3. Volterra-Fredholm İntegral denkleminin yaklaşık

çözümünde yapılan mutlak hatalar

			Mutlak Hatalar	
x	**Analitik Çözüm**	**Kollokasyon Çözümü**	**Lagrange yaklaşımı Ref [10]**	**Mevcut Çalışma**
0.0	1.000000	1.000000	0	$2.38x10^{-8}$
0.4	0.921061	0.921061	$4.59x10^{-6}$	$4.11x10^{-10}$
0.8	0.696707	0.696707	$8.38\ x10^{-6}$	$9.11x10^{-10}$
1.2	0.362358	0.362358	$1.37x10^{-5}$	$1.53x10^{-9}$
1.6	-0.02919	-0.0291995	$2.15x10^{-5}$	$2.38x10^{-9}$
2.0	-0.41614	-0.416147	$3.17\ x10^{-5}$	$1.42x10^{-8}$

TARTIŞMA

Tablo 1 incelendiğinde kollokasyon yönteminin Volterra integral denklem için uygun yaklaşık çözümü verdiği görülmektedir. Bulunan noktasal mutlak hata oranları oldukça küçüktür.

Fredholm integral denklemi için bulunan yaklaşık çözümlerde yapılan en büyük mutlak hataların kollokasyon nokta sayısı değişimi Tablo 2 de verilmektedir. Nokta sayısının artışıyla beraber en büyük mutlak hata değeri azalmaktadır.

Şekil 1 de Volterra-Fredholm integral denklemi için kollokasyon yönteminin uygun bir yaklaşık çözüm verdiği görülmektedir. Tablo 3 incelendiğinde bu yöntemin Muna ve Iman'ın kullandığı Lagrange yaklaşımından daha küçük hatalar verdiği görülmektedir.

SONUÇLAR

Kollokasyon yöntemiyle incelenen lineer integral denklemlere polinom temelli yaklaşık çözümler bulunabilmiştir. Basit işlem ve programlama adımlarıyla bulunan yaklaşık çözümlerde yapılan mutlak hatalar oldukça küçüktür. Yöntem problemi bağımsız değişkenin sınırları içerisinde keyfi alınan noktaların sayısı kadar denkleme sahip bir denklem sistemine indirgeyerek çözme şansı vermektedir.

Kollokasyon yönteminde kullanılan ve literatürde deneme fonksiyonu olarak adlandırılan polinomdaki derece artışıyla beraber yaklaşık çözümlerde yapılan mutlak hata istenilen kadar azaltılabilmektedir. Yöntem araştırmacılara integral ve integro diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini daha kolay bulma imkanı vermektedir.

KAYNAKLAR

1. Arikoglu, A., & Ozkol, İ. (2008). Solutions of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method. *Computers and Mathematics with Applications*, 56 (9), 2411-2417. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.05.017

2. Abazari, R., & Kılıçman, A. (2013). Numerical study of two-dimensional volterra integral equations by rdtm and comparison with dtm. *Abstract and Applied Analysis*, article ıd 929478. https://doi.org/10.1155/2013/929478

3. Rodelas, P. G., Pasadas, M., Kouibia, A., & Mustafa, B. (2022). Numerical solution of linear volterra integral equation systems of second kind by radial basis functions. *MDPI Mathematics*, 10 (2): 223. https://doi.org/10.3390/math10020223

4. Adhraa, M. M., & Ayal, A. M. (2019). Numerical solution of linear volterra integral equation with delay using bernstein polynomial. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 735-740. https://doi.org/10.29333/iejme/5880

5. Shoukralla, E. S., & Ahmed, B. M. (2019). Numerical solutions of volterra integral equations of the second kind using lagrange interpolation via the vandermonde matrix, *J. Phys.: Conf. Ser. 1447 012003, ICaTAS 2019.* https://doi.org/doi:10.1088/1742-6596/1447/1/012003

6. Parandin, N., & Gholamtabar, Sh. (2010). Numerical solution of the linear fredholm integral equations of the second kind. *Journal of Mathematical Extension,* 5(1), 31–39.

7. Hendi, F. A., & Al-Qarni, M. M. (2016). Comparison between adomian's decomposition method and toeplitz matrix method for solving linear mixed integral equation with hilbert kernel. *American Journal of Computational Mathematics,* 6(2), 177–183. http://dx.doi.org/10.4236/ajcm.2016.62019

8. K. Köklü, K. (2018). *İntegral Denklemler* (1st ed.). Papatya Yay. Eğt. , İstanbul.

9. Guo, P. (2020). Numerical simulation for fredholm integral equation of the second kind. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 8, 2438-2446. https://doi.org/10.4236/jamp.2020.811180.

10. Muna, M. M., & Iman, N. G. (2014). Numerical solution of linear volterra-fredholm integral equations using lagrange polynomials. *Mathematical Theory and Modeling*, 4(5), 137–146.