4th International Conference on Scientific and Academic Research

July 19-20, 2024 : Konya, Turkey

© 2024 Published by All Sciences Academy

https://www.icsarconf.com/

Plakanın Serbest Titreşiminde Öz değerlerin Galerkin Yöntemiyle Bulunması

Birkan DURAK[1*]

[1] *Elektrik ve Enerji Bölümü, İklimlendirme Soğutma Teknolojisi Programı / Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Türkiye*

[*]*(birkand@iuc.edu.tr)*

Özet **–** Plakalar mühendislikte çok farklı amaçlarla kullanılan elemanlardır. Havacılık ve uzay mühendisliğinde uçuş ve kontrol yüzeyi, makine ve inşaat mühendisliğinde tavan, taban veya destek elemanı, üretim bantlarında taşıyıcı olarak plakalardan yararlanılır. Ayrıca savunma sanayinde farklı amaçlarla geniş bir kullanım alanları vardır. Kullanım alanlarına göre farklı türlerde kuvvetlere ve titreşimlere maruz kalan plakaların hareketlerinin incelenmesi bu anlamda önemlidir. Bu inceleme sayesinde meydana getirilen tasarlanan mühendislik yapısının işletme ömrünün tahmini rahatlıkla yapılabilir. Gerekli tedbirler alınarak bu ömür uygun şekilde uzatılabilir. Mevcut çalışmada Kalınlığı h_p ve genişliği b olan z yönünde sonsuz uzun olan ve iki kenarından basit mesnetlenmiş alüminyum bir plakanın serbest titreşimi incelenmiştir. Plakanın titreşimine ait olan öz değerler hem analitik hem de Galerkin yöntemiyle hesaplanmıştır. Ağırlıklı Kalanlar Yöntemlerinden birisi olan Galerkin yöntemi sayesinde göz önüne alınan problemin çözümü lineer bir denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Yöntem her ne kadar integrasyon işlemi içerse de sınır şartlarını sağlayacak şekilde polinom şeklinde önerilmiş olan deneme fonksiyonu ailesinin kullanımıyla ve basit bir programlama ile hesaplamalar yapılabilmiştir. Deneme fonksiyonun derecesinin artışıyla beraber yeterli hassiyette öz değer bulmak mümkün olmuştur. Sayısal sonuçlar incelendiğinde Galerkin yöntemiyle alüminyum plakanın ilk üç değeri hesabın sonucunda ilk iki özdeğer olan ω_1 ve ω_2 de 0.00074 bağıl yüzde hata varken bu hata değeri üçüncü öz değer ω_3 için 0.00069 olmuştur. Çalışmamız akış kaynaklı titreşime maruz kalan düz, delikli veya farklı türde çatlağa sahip vb. plakaların titreşiminin incelenmesinde önemli bir alt yapı sağlayacaktır.

Anahtar Kelimeler – Plaka, Titreşim, Öz değer, Ağırlıklı Kalanlar, Galerkin Yöntemi

I. GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarında farklı türde ve boyutlarda kiriş, plaka, kabuk gibi yapısal elemanlar kullanılmaktadır. Plakalar havacılık, uzay taşıtları veya uyduların uçuş ya da kontrol yüzeyi olarak kullanılırken, makine, inşaat mühendisliği ve mimarlıkta tavan, taban, koruma ve destek elemanı olarak iş görürler. Kullanım alanlarına göre farklı türde kuvvet ve titreşimlere maruz kalan plakaların hareketlerinin incelenmesi bu anlamda önemlidir. Böylece tasarlanan mühendislik yapısında kusurların belirlenmesi ve bunlara yönelik önlem alınması mümkün olur. Literatür incelendiğinde serbest titreşimle ilgili çözümlerde farklı yöntemlerinin araştırmacılarca kullanıldığı görülmektedir.

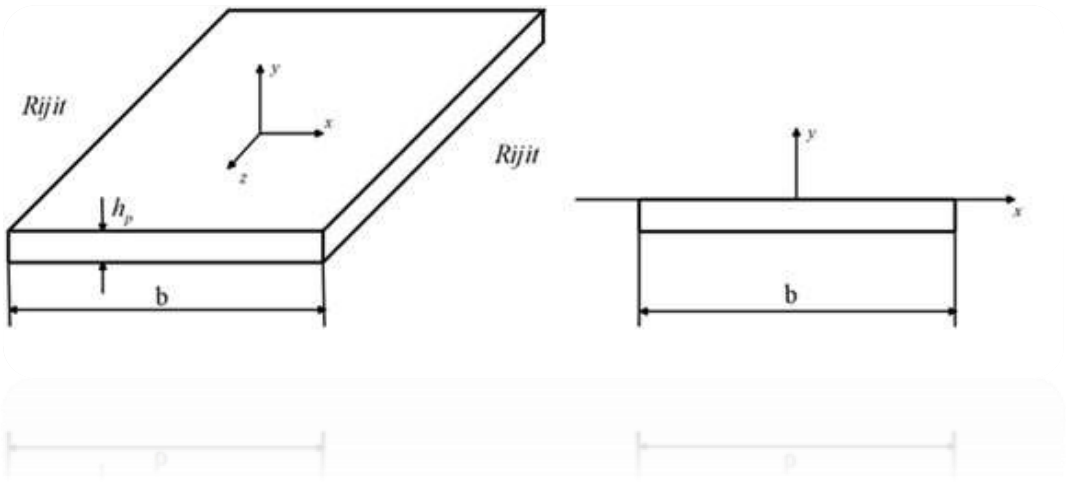
Serbest, basit desteklenen ve sabit kenarlar birleştirilerek elde edilebilecek olası tüm sınır koşullarına sahip dikdörtgen plakaların serbest enine titreşimleri incelenmiştir. Bu çalışmada Rayleigh yöntemi tüm titreşim modları için basit bir yaklaşık frekans ifadesi elde etmek için kullanılmıştır [1].

II. MATERYAL VE YÖNTEM

Plakaların serbest titreşiminde öz değerler hesaplanarak bu hareket sırasında alacakları şekiller (modeshape) çizdirilebilir. Ayrıca akış kaynaklı bir titreşim sırasında bulunan öz değerlerin sanal kısımlarının işaret değişimi incelenerek plakanın çırpınma (flutter) hızı hesaplanmaya çalışılır. Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm plaka serbest titreşiminin analitik çözümü yapılarak öz değerler hesaplanmıştır. İkinci bölümde ise Galerkin yöntemiyle aynı öz değerler bulunmuştur.

A. PROBLEM VE ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Şekil 1 de kalınlığı h_p ve genişliği b olan z yönünde sonsuz uzun bir plakayı göz önüne alınmıştır. Plaka iki kenarından basit mesnetlenmiştir ve yan tarafları rijit bir zemindir.



(a) Ön görünüş (b) Sol yan görünüş

Şekil 1: z yönünde sonsuz uzun ve basit mesnetlenmiş plaka.

Plaka hareket denklemi çeşitli yayınlarda aşağıdaki şekilde verilir. [2], [3], [4]

$$D\frac{\partial^4 \mathrm{v}}{\partial x^4}+\rho_p h_p \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} \tag{1}$$

Bu denklemde D plaka eğilme rijitliği olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde verilir.

$$D=\frac{Eh_p{}^3}{12(1-\upsilon^2)} \tag{2}$$

Burada $\boldsymbol{E}$ Elastite modülünü, $\boldsymbol{h_p}$ plaka kalınlığını ve $\boldsymbol{\nu}$ ise possion oranını göstermektedir. Plaka yer değiştirmesi $\mathbf{v}=\boldsymbol{V(x)e^{i\omega t}}$ şeklinde olsun bu ifade denkleme yazılarak ve boyutsuzlaştırma yapılmasıyla denklem (1) ile verilen hareket denklemi aşağıdaki basit hale gelecektir.

$$\begin{aligned} &D\frac{d^4V}{dx^4}-\omega^2\rho_p h_p V=0 \\ &V(-1/2)=V(+1/2)=0 \\ &\frac{d^2V}{dx^2}(-1/2)=\frac{d^2V}{dx^2}(+1/2)=0 \end{aligned} \tag{3}$$

Bu diferansiyel denklemin karakteristik denklemi ve çözümü

$$\begin{aligned} &r^4-k^4=0 \\ &k=\sqrt[4]{\frac{\omega^2\rho_p h_p}{D}} \\ &V(x)=C_1\,\mathrm{Cos}(kx)+C_2\,\mathrm{Sin}(kx)+C_3\,\mathrm{Cosh}(kx)+C_4\,\mathrm{Sinh}(kx) \end{aligned} \tag{4}$$

denklem (3) deki sınır şartları (4) denklemine yazılarsa aşağıdaki gibi matris formunda gösterilen denklem sistemine ulaşılır.

$$\begin{bmatrix} \cos(\mathrm{k}/2) & \sin(\mathrm{k}/2) & \cosh(\mathrm{k}/2) & \sinh(\mathrm{k}/2) \\ \cos(\text{-k}/2) & \sin(\text{-k}/2) & \cosh(\text{-k}/2) & \sinh(\text{-k}/2) \\ \text{-}\cos(\mathrm{k}/2) & \text{-}\sin(\mathrm{k}/2) & \cosh(\mathrm{k}/2) & \sinh(\mathrm{k}/2) \\ \text{-}\cos(\text{-k}/2) & \text{-}\sin(\text{-k}/2) & \cosh(\text{-k}/2) & \sinh(\text{-k}/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 \\ \mathrm{C}_3 \\ \mathrm{C}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Bu denklem sisteminde $C_1, C_2, C_3, C_4 \neq 0$ şeklinde bir çözüm olması için katsayılar matrisinin determinantı ω nın bir fonksiyonu olup sıfır olmalıdır. ω incelenen problemin öz değeridir. Aşağıda verilen değerler kullanılarak öz değerler hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} &\upsilon = 0,3 \\ &E = 70.10^9\ N/m^2 \\ &D=\frac{Eh_p{}^3}{12(1-\upsilon^2)} = 6410{,}26\,kgm^2/s^2 \\ &h_p = 0.01m \\ &\rho_p = 2720\,kg/m^3 \end{aligned}$$

İlk üç özdeğer $n = 1, 2, 3$ için öz değerler;

$\omega_1 = 151.5130$
$\omega_2 = 606.0520$
ω_3 1363.6170

B. PROBLEMİN GALERKİN ÇÖZÜMÜ

Denklem (3) ile verilen problemin için sınır şartlarını sağlayan

$$\varphi_n(x) = x^{n+3} - \frac{(2n+1)}{(4n-2)} x^{n+1} + \frac{(2n+3)}{16(2n-1)} x^{n-1} \tag{5}$$

şeklindeki fonksiyonlar ve bunların lineer kombinasyonları da sınır şartlarını sağlar. C_n sabit katsayılar olmak üzere bu fonksiyonların lineer kombinasyonları da sınır şartlarını sağlar. Plakanın yer değiştirmesi

$$V(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(x) \tag{6}$$

(6) nolu denklem (3) nolu denkleme yazılırsa kalan

$$R(x) = D\left(\sum_{n=1}^{N} C_n \frac{d^4 \varphi_n(x)}{dx^4} \right) - \omega^2 \rho_p h_p \left(\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(x) \right) \tag{7}$$

olacaktır. (7) denklemindeki ω ' ları (problemin öz değerlerini) bulmak için aşağıdaki

$$W_n = \frac{\partial V(x)}{\partial C_n} \tag{8}$$

ile verilen Ağırlık fonksiyonu ile kalan çarpılarak problemin sınırlarında integre edilir ve en son sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi kurulur. Buna göre

$$R_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} R(x) W_n(x) dx \qquad n = 1,2,3, \ldots \ldots, N \tag{9}$$

Bu denklemin açık hali

$$R_n = \sum_{n=1}^{N} \int_{-1/2}^{1/2} \left[C_n D \frac{d^4 \varphi_n(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho_p h_p C_n \varphi_n(x) \right] \varphi_n(x) dx \qquad n = 1,2,3, \ldots\ldots, N \tag{10}$$

(9) denklemindeki R_n ifadesi sadece C_n ve ω 'nın fonksiyonudur. N'e değerler verilerek bulunan $R_1, R_2, R_3, \ldots \ldots, R_N$ ifadeleri ayrı yarı sıfıra eşitlenir. Böylece bir denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sisteminin matris gösterimi

$$[R_n(\omega^2)]_{NxN} . [C_n]_{Nx1} = [0]_{Nx1} \tag{11}$$

şeklindedir. Denklem (11) deki katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek $C_1,\ C_2,\ C_3, \dots, C_n \neq 0$ olacak çözümler bulunur.Yani plaka çökmesinin sıfır olmadığı çözümler elde edilir. Örneğin $N = 2$ için bu denklem sistemi denklem (12) deki gibidir.

$$\begin{bmatrix} 30769.248 - 1.3584\omega^2 & 0 \\ 0 & 3052.504 - 0.081\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Burada katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek

$$-0.0109442\omega^4 - 4337.11\omega^2 + 9.99233x10^7 = 0 \tag{13}$$

denklemine ulaşılır. (13) deki ifadenin kökleri ise bize plaka serbest titreşiminin öz değerlerini $\omega_{1,2} = \pm 151.622\ \ \omega_{3,4} = \pm 610.986$ olarak verir. Tablo 1' de ilk üç öz değer analitik olarak ve Galerkin yönteminde N'nin farklı değerleri için verilmiştir.

Tablo 1. Öz değerlerin analitik ve galerkin yöntemiyle bulunan değerleri

Öz değer	Analitik	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6	N = 7	N = 8	N = 9
ω_1	151.5130	151.6224	151.5141	151.5141	151.5141	151.5141	151.5141	151.5141	151.5141
ω_2	606.0520	610.9855	610.9855	606.0747	606.0747	606.0565	606.0565	606.0564	606.0564
ω_3	1363.6170	--------	1401.7918	1401.7918	1364.1302	1364.1302	1363.6294	1363.6294	1363.6271

III. BULGULAR

Deneme fonksiyonun derecesinin artışıyla beraber yeterli hassiyette özdeğer bulmak mümkün olmuştur. Sayısal sonuçlar incelendiğinde Galerkin yöntemiyle alüminyum plakanın ilk üç değeri hesabın sonucunda ilk iki özdeğer olan ω_1 ve ω_2 de 0.00074 bağıl yüzde hata varken bu hata değeri üçüncü özdeğer ω_3 için 0.00069 olmuştur.

IV. TARTIŞMA

Sınır şartlarını sağladığı sürece herhangi bir test (deneme) fonksiyonu seçilebilir. Başka bir problemde seçilen deneme fonksiyonunun derecesinin arttırılmasıyla mutlak hatanın gittikçe azalamaması gibi bir sorun olması durumunda çözüm için özel polinomlar (Chebyshev, Legendre, Lagurre vb.) alınarak bu güçlük aşılabilir. Bu çalışmada da yapıldığı gibi Galerkin yönteminde integrali kolay alınabilen polinomları veya herhangi bir özel fonksiyon seçmek bir avatanjdır. Integral alma işlemleri simgesel matematik yazılımları ile yapılırsa yöntemin programlaması daha kolay olmaktadır.

V. SONUÇLAR

Plakanın titreşimine ait olan öz değerler hem analitik hem de Galerkin yöntemiyle hesaplanmıştır. Ağırlıklı Kalanlar Yöntemlerinden birisi olan Galerkin yöntemi sayesinde göz önüne alınan problemin çözümü lineer bir denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Yöntem her ne kadar integrasyon işlemi içerse de sınır şartlarını sağlayacak şekilde polinom şeklinde önerilmiş olan deneme fonksiyonu ailesinin kullanımıyla ve basit bir programlama ile hesaplamalar yapılabilmiştir. Çalışmamız akış kaynaklı titreşime maruz kalan düz, delikli veya farklı türde çatlağa sahip vb. plakaların titreşiminin incelenmesinde önemli bir alt yapı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

[1] G. B. Warburton, “The vibration of rectangular plates”, *Proceeding of institution of mechanical engineers*, vol 168 (1), pp 371-384, 1954

[2] E.H. Dowell, “Flutter of infinitely long plates and shells part I: plate”, *AIAA Journal*, vol 4 (8), pp 1370-1377, 1966

[3] R.J. Epstein, “Flutter of an infinitely long panel in a duct”, *AIAA Journal*, vol 33 (1), pp 109-115, 1995

[4] E. Uzal and B. Körbahti, “Vibration control of an elastic strip by a singular force”, *Indian academy of sciences, Sadhana*, vol 35 (2), pp 233-240, 2010