Silindirik Kabuğun Üzerindeki Basıncın Analitik İfadesi

Birkan DURAK[1*]

Erol UZAL[2]

1-İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, Uçak Teknolojisi Programı, birkand@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0002-8196-5407
2-İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü, euzal@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0003-0008-1376
Bu çalışma Birkan DURAK'ın "Kabuk Yapılarda Akışkan-Elastik Cisim Etkileşiminin Teorik İncelenmesi" adlı Doktora tezinden üretilmiştir.)

ÖZET

En az iki eğrilik yarıçapına sahip olan ve küçük kalınlığa sahip yapı elemanı olan kabuklar işlevsel, sağlam, emniyetli, hafif ve ekonomik sistemlerdir. Bu yüzden çeşitli mühendislik uygulamalarında kabuklardan farklı amaçlarla yararlanılır. Mevcut çalışmada gibi x yönünde sonsuz uzun olan ve bu yön boyunca iki ucundan basit mesnetlenmiş bir silindirik kabuğun üzerinden akışkan geçişi sırasında meydana gelen basınç analitik olarak bulunmuştur.İncelenen kabuk malzemesi lineer elastik, homojen ve izotropiktir. Silindirik kabuk rijit xy düzlemine oturmaktadır. Silindirden uzakta akışkan y yönünde sabit U hızıyla akmaktadır ve akış potansiyellidir.

Anahtar Kelimeler – Akış kaynaklı titreşim, Çırpınma hızı, Elastik boru, Özdeğer, Titreşim

GİRİŞ

En az iki eğrilik yarıçapına sahip olan ve küçük kalınlığa sahip yapı elemanıdır. Kabuklar işlevsel, sağlam, emniyetli, hafif ve ekonomik sistemlerdir. Kabukların inşaat mühendisliğinde; Büyük açıklıklı mekanların örtülmesinde, Su, akaryakıt ve gaz depolarında (silindirik, konik, küresel kabuk olarak), Büyük sanat yapılarında (paraboloid, silindir, eliptik hiperbol vb. şekillerde), Soğutma kulelerinde (hiperboloid geometride), Tahıl veya çimento silolarında,baraj gövdelerinde,uçak hangarı, stadyumlarda ve tünellerde kullanılır. Makine mühendisliğinde; sıvı veya gaz taşıyan borularda ve bunları depolamak için kullanılan tanklarda, otomobil gövdesinde ve denizaltılarda mevcuttur. Ayrıca havacılıkta ve uzay sanayinde ise roketlerde, uçak gövde ve kanatlarında kabuklar kullanılmaktadır.

Kabukları şekillerine göre sınıflandırmak genel olarak kabul görmüştür. Buna rağmen çoğu zaman kabukların sınıflandırılmasında kabuğu kesin ve yalnızca bir sınıfa sokmak mümkün ve doğru bir yaklaşım olmaz. Bunun nedeni bir kabuk, dairesel ve tam yüzeyli, tepesi kapalı, tek/çift tabakalı, ortotrop, kusurlu ve konik olabilir. Değişik kabuk tipleri arasında Dönel silindirik yüzeyli (Dairesel, Eliptik, Parabolik, Tonoz), Konik yüzeyli (Dairesel, Eliptik vb.), Küresel, Paraboloid, Hiperboloid, herhangi iki eğrilikli dönel kabuk, Eliptik paraboloid, Hiperbolik paraboloid, Bombeli yüzeyli, Prizmatik yüzeyli vb. yer alır.

İNCE KABUK TEORİSİ

Bir plakanın veya kabuğun hareket denkleminin kısa ve net olarak oluşturulması için aşağıdaki dört adet varsayımdan yararlanılır.

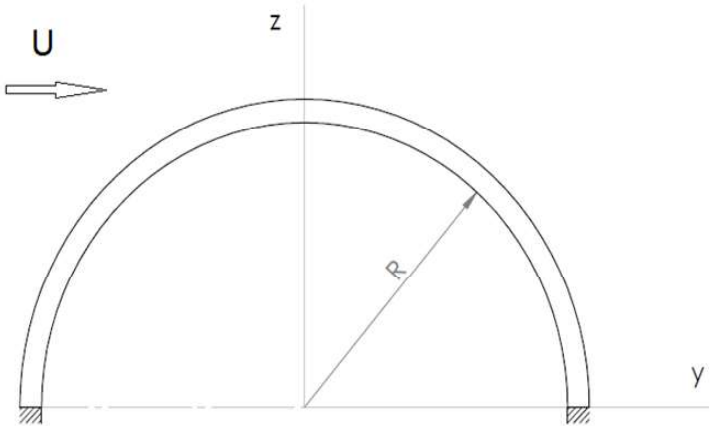
1. Kalınlık diğer boyutlara göre çok küçüktür.
2. Gerinme (birim boy uzaması) ve yer değiştirmeler yeterince küçüktür. Bu ifadelerin iki ve daha yukarısındaki mertebeden terimleri ihmal edilir.
3. Enine gerilmeler diğer gerilme bileşenlerine nazaran daha küçük olduğundan göz önüne alınmazlar.
4. Kabuk orta yüzeyinin normali deformasyon sonrasında değişmez. Dolasıyla kalınlık deformasyon sonrasında değişmediği varsayılır.

(Leissa, 1973) bahsedilen dördüncü yaklaşımın literatürde Kirchhoff hipotezi olarak bilindiğini belirtmiştir. Kirchhoff hipotezi kirişlerin basit eğilme teorisindeki ilişkilere benzemektedir. Oluşturulan plaka eğilme teorisi, klasik veya Kirchhoff'un plaka teorisi olarak adlandırılmaktadır. Üçüncü ve dördüncü varsayımlar, ince elastik kabukların hareket denklemlerinin oluşturulmasında kullanılır ve kabuğun özel bir ortotropi tipine sahip bir malzeme gibi davranmasını kabul ederler. Gerinme ve yer değiştirme denklemlerinde bazı basitleştirmeler yapan araştırmacılar kendi adları ile anılan kabuk teorilerini oluşturmuşlardır. Çalışmada Donell-Mushtari-Vlasov (DMV) ince kabuk teorisinden yararlanılarak verilen hareket denklemleri göz önüne alınmıştır.

KABUK MALZEMESİ VE HAREKET DENKLEMLERİ İÇİN YAPILAN KABULLER

Mühendislikte anizotropi malzemenin elastiklik özelliklerinin yöne göre faklılık gösterdiğini belirtir. Ayrıca karşılıklı olarak birbirine dik üç düzleme göre, elastiklik özellikler ikişer ikişer simetrik ise malzeme ortotropiktir. İncelenen malzemenin elastik sabitleri koordinat eksenlerinin doğrultusundan bağımsız ise (herhangi bir noktadan geçen tüm doğrultularda aynıysa) o halde izotroptur denir.Malzeme lineer ise gerilmenin, gerinmeye oranı Elastisite modülünü vermektedir. Davranışı incelenen malzeme nonlineer ise Hooke yasası geçerli olmaz bu durumda gerilme ifadesi ile gerinmenin aralarındaki ilişki bir doğrudan ziyade bir eğri şeklinde olacaktır. Kuvvet ve deplasmanlar sürekli fonksiyonlarla ifade edilebilirler. Bu literatürde süreklilik hipotezi olarak bilinir. Kabuk malzemesi homojen, izotrop ve sürekli ortam özellikleri taşıyorsa süreklilik hipotezi sağlar denilir.

Şekil 1 deki gibi x yönünde sonsuz uzunluğa sahip olan ve bu yön boyunca iki ucundan basit mesnetlenmiş bir silindirik kabuk göz önüne alınsın. Göz önüne alınan kabuk malzemesi lineer elastik, homojen ve izotropiktir. Doğal olarak kabuk süreklilik hipotezini de sağlar. Silindirik kabuğun oturduğu zemin olan xy düzlemi rijittir. Silindirden uzakta akışkan y yönünde sabit U hızıyla akmaktadır ve akış potansiyellidir.



Şekil 1: Akışa maruz kalan silindirik kabuk

Kabukta meydana gelen x, y ve z yönlerindeki çökmeler sırasıyla $u(x,\theta,t), v(x,\theta,t)$ ve $w(x,\theta,t)$ olmak üzere hareket denklemleri Donell-Mushtari-Vlasov (DMV) İnce Kabuk Teorisine göre aşağıdaki şekilde verilir. (Yao, 2016), (Blevins, 2016), (Bracewell, 2000)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\upsilon}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1+\upsilon}{2R}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial\theta}+\frac{\upsilon}{R}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}-\frac{(1-\upsilon^2)}{E}\rho_k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{1-\upsilon}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \theta^2}+\frac{1+\upsilon}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \theta}-\frac{(1-\upsilon^2)}{E}\rho_k\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

$$R^2\lambda\left(\frac{\partial^4 \mathrm{w}}{\partial x^4}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial^4 \mathrm{w}}{\partial x^2\partial\theta^2}+\frac{1}{R^4}\frac{\partial^4 \mathrm{w}}{\partial\theta^4}\right)+\frac{\mathrm{w}}{R^2}+\frac{\upsilon}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\theta}+\frac{(1-\upsilon^2)}{E}\rho_k\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t^2}=P$$

Burada $\lambda=\dfrac{h_k^2}{12R^2}$ dir. Kabuk x yönünde sonsuz uzun olduğundan içerisinde u'yu barındıran terimler düşer ve $\dfrac{\partial(...)}{\partial x}$ şeklindeki kısmi türevler sıfır olur. Verilen çökmelerden x yönünde olanı $u=0$ olurken y ve z yönünde olanları ise $v(x,\theta,t)$ ve $w(x,\theta,t)$ olacaktır. Gerekli düzenlemeler yapılarak (1) denklemi

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial\theta^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial\theta}-\frac{(1-\upsilon^2)}{E}\rho_k\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{h_k^2}{12R^4}\left(\frac{\partial^4 \mathrm{w}}{\partial\theta^4}\right)+\frac{\mathrm{w}}{R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\theta}+\frac{(1-\upsilon^2)}{E}\rho_k\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t^2}=P \qquad (2)$$

haline gelecektir. Bu denklem sisteminin sınır şartları

$$\mathrm{v}(0) = \mathrm{v}(\pi)$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \theta}(0) = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \theta}(\pi) = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial \theta^3}(0) = \frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial \theta^3}(\pi) = 0$$

olacaktır. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümü ile kabuğun akışkan geçişi sırasında üzerinde oluşan basınç için analitik bir ifade bulunabilir. Bunun için silindirik kabuğun yarıçapının zamanla değişiminin denklem (3) ve akım fonksiyonun ise denklem (4) deki gibi olduğu varsayılsın.

$$r = R + \varepsilon w(\theta, t) \tag{3}$$

Bu denklemlerdeki ε pertürbasyon parametresidir ve iki ya da daha yüksek mertebeden kuvvetlerini içeren terimler dikkate alınmayacaktır.

$$\psi(r, \theta\,; \varepsilon) = \psi_0(r, \theta) + \varepsilon \psi_1(r, \theta) + \ldots\ldots\ldots \tag{4}$$

Akış potansiyellidir yani akım fonksiyonu Laplace denklemini sağlar.

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \psi_0 + \nabla^2 \psi_1 = 0$$

Bu denklemdeki y_0 daire üzerindeki akış olarak akışkanlar mekaniği kitaplarında

$$\nabla^2 \psi_0 = 0 \quad dan \quad \psi_0 = U(r - \frac{R^2}{r}) \mathrm{Sin}\,\theta \tag{5}$$

şeklinde verilir. Böylece silindirik kabuk üzerinde akım fonksiyonu

$$\psi(R + \varepsilon\, w(\theta, t), \theta) = \psi_0(R + \varepsilon w(\theta, t), \theta) + \varepsilon \psi_1(R + \varepsilon\, w(\theta, t), \theta) + \ldots. = 0 \tag{6}$$

haline gelir.

$$\psi(R, \theta) = \psi_0(R, \theta) + \varepsilon w(\theta, t) \frac{\partial \psi_0(R, \theta)}{\partial r} + \varepsilon \psi_1(R, \theta) + \ldots\ldots\ldots = 0 \tag{7}$$

$$\psi_0(R,\theta) = 0$$
$$\psi_1(R,\theta) = -w(\theta,t)\frac{\partial \psi_0(R,\theta)}{\partial r} \tag{8}$$

(5) nolu denklemdeki ψ_0 ın eşiti (8) nolu denkleme yazılırsa

$$\psi_1(R,\theta) = -w(\theta,t)U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\mathrm{Sin}(\theta) \tag{9}$$

ifadesine ulaşılır. Buna göre denklem (2) ile verilen ikinci denklemdeki P basınç terimini denklem (10) daki problemin çözümü verecektir.

$$\nabla^2 \psi_1 = 0$$
$$r = R \quad de$$
$$\psi_1(R,\theta) = f(\theta) = -w(\theta,t)\, U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\mathrm{Sin}\,\theta \tag{10}$$
$$r = \infty \; da \qquad \psi_1 = 0$$

Bu problemin çözümü değişkenlerin ayrıştırılması yöntemi kullanılarak bulunur. Problemin çözümü $\psi_1(r,\theta) = R(r)\,\phi\,(\theta)$ formunda olsun. Bu çözüm silindirik koordinatlarda Laplace denklemine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} = 0$$
$$\frac{r^2 R'' + r\,R'}{R} + \frac{\phi''}{\phi} = 0 \tag{11}$$

denklemlerine ulaşılır. Burada λ bir reel sayı olmak üzere

$$\frac{r^2 R'' + r\,R'}{R} = \lambda \qquad r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{12}$$
$$\frac{\phi''}{\phi} = -\lambda \qquad \phi'' + \lambda\phi = 0 \tag{13}$$

ifadelerine ulaşılır. Denklem (10) daki çözümün tek değerli olabilmesi için $\psi_1(r,\theta+2\pi) = \psi_1(r,\theta)$ şartı sağlanmalıdır. Buna uygun olarak (13) denklemi sınır şartları yazılarak çözülür

$$\phi'' + \lambda\phi = 0$$
$$\phi(0) = \phi(2\pi) = 0 \qquad (14)$$
$$\phi'(0) = \phi'(2\pi) = 0$$

Bu adi diferansiyel denklemin çözümü için λ' nın alabileceği tüm değerler incelenmelidir. Denklem (15) incelenirse

$$\lambda < 0 \quad iken \quad \phi(\theta) = 0$$
$$\lambda = 0 \quad iken \quad \phi(\theta) = C_2$$
$$\lambda > 0 \quad iken \quad \phi(\theta) = C_5 \,\mathrm{Cos}(\sqrt{\lambda}\,\theta) + C_3 \,\mathrm{Sin}(\sqrt{\lambda}\,\theta) \quad ve \ \lambda = n^2 \quad alarak$$
$$\phi(\theta) = C_5 \,\mathrm{Cos}(n\theta) + C_3 \,\mathrm{Sin}(n\theta) \qquad n = 1, 2, 3.....$$

(15)

Aranan çözüm $\lambda > 0$ durumudur. Denklem (12)

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - n^2R = 0 \qquad (16)$$

haline gelir ve bu denklem Euler diferansiyel denklemidir, çözümü ise

$$R(r) = \begin{cases} C_7 r^n + C_8 r^{-n} & , \quad n \neq 0 \ \ ise \\ C_3 \,In\, r + C_4 & , \quad n = 0 \ \ ise \end{cases} \qquad (17)$$

denklem (17) deki gibidir. Bu ve denklem (15) akım fonksiyonunda yazılarak

$$\psi_1(r,\theta) = \begin{cases} [C_7 r^n + C_8 r^{-n}][C_5 \,\mathrm{Cos}(n\theta) + C_6 \,\mathrm{Sin}(n\theta)] & n = 1, 2, 3..... \\ C_2[C_3 \,In\, r + C_4\ ] \quad , \quad n = 0 \ \ ise \end{cases}$$

(18)

denklemi bulunur. bu denklemdeki çözümün sınırlı olarak kalması için M bir reel sayı iken $\lim_{r\to\infty} \left|\psi_1(r,\theta)\right| < M$ olmalıdır. Buna göre

$$C_7 r^n = 0 \quad ve \quad C_2 C_3 \,In\, r = 0 \qquad (19)$$

olacaktır. Ayrıca aşağıdaki tanımlar yapılarak

$$\left.\begin{aligned} C_8 C_5 &= C_9 \\ C_8 C_6 &= C_{10} \end{aligned}\right\}$$

(19) denklemi (18) denklemine yazılırsa

$$\psi_1(r,\theta)=\begin{cases} C_2C_4 \quad , \qquad n=0 \;\; ise \\ r^{-n}\left[C_9\,\mathrm{Cos}(n\theta)+C_{10}\,\mathrm{Sin}(n\theta)\right] \qquad n=1,2,3..... \end{cases} \tag{20}$$

denklemine ulaşılır.$C_2C_4=\alpha_0$ kabul edilmesi halinde akım fonksiyonun formal çözümü denklem (21)

$$\psi_1(r,\theta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\left[\alpha_n\,\mathrm{Cos}(n\theta)+\beta_n\,\mathrm{Sin}(n\theta)\right] \tag{21}$$

ile verilir ve bu denklem sınır şartlarını sağlamalıdır.

$$\psi_1(R,\theta)=f(\theta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty} R^{-n}\left[\alpha_n\,\mathrm{Cos}(n\theta)+\beta_n\,\mathrm{Sin}(n\theta)\right]$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{Cos}(m\theta)\,d\theta=\alpha_0\int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}(m\theta)\,d\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R^n}\alpha_n\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}(n\theta)\,\mathrm{Cos}(m\theta)\,d\theta}_{\pi.\delta_{mn}}+.... \tag{22}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R^n}\beta_n\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{Sin}(n\theta)\,\mathrm{Cos}(m\theta)\,d\theta}_{\substack{n=m\;\to 0\\ n\neq m\;\to 0}}$$

Bu denklemdeki δ ifadesi dirac delta fonksiyonunu göstermektedir. Denklem (22) deki α_n katsayısı ise

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{Cos}(m\theta)\,d\theta=\alpha_0\int_0^{2\pi}\mathrm{Cos}(m\theta)\,d\theta+\frac{1}{R^m}\alpha_m\pi$$

$$m\neq 0 \;\rightarrow\; \alpha_m=\frac{1}{\pi R^{-m}}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{Cos}(m\theta)\,d\theta \qquad (m=1,2,3,.....) \tag{23}$$

$$m=0 \;\rightarrow\; \alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$$

denkleminden

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{Sin}\,(m\theta)\,d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{Sin}\,(m\theta)\,d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^n}\alpha_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{Cos}(n\theta)\,\mathrm{Sin}\,(m\theta)\,d\theta}_{\substack{n=m \to 0 \\ n\neq m \to 0}} + \ldots.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R^n}\beta_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{Sin}(n\theta)\,\mathrm{Sin}\,(m\theta)\,d\theta}_{\pi.\delta_{mn}} \qquad (24)$$

olarak bulunur. β_n katsayısı için ise

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\ \mathrm{Sin}\,(m\theta)\,d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{Sin}\,(m\theta)\,d\theta + \frac{1}{R^m}\beta_m\,\pi$$

$$m \neq 0 \ \rightarrow\ \beta_m = \frac{1}{\pi\, R^{-m}} \int_0^{2\pi} f(\theta)\ \mathrm{Sin}\,(m\theta)\,d\theta \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots..) \qquad (25)$$

ifadesi geçerlidir. (23) ve (25) nolu denklemler (21) nolu denklemde yazılır ve $m \rightarrow n$ yapılırsa denklem (26) elde edilir.

$$\psi_1(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \left[\alpha_n\,\mathrm{Cos}\,(n\theta) + \beta_n\,\mathrm{Sin}\,(n\theta)\right]$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\ \mathrm{Cos}\,(n\theta)\,d\theta$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\ \mathrm{Sin}\,(n\theta)\,d\theta \qquad (26)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$$

Denklem (10) ile verilen sınır şartları denklem (26) te yazılırsa silindirik kabuk üzerindeki basınç teriminde kullanılacak akım fonksiyonu hesaplanabilir.

$$r = R \quad de$$

$$f(\theta) = -2U\,w(\theta,t)\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

$$\psi_1(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \left[\alpha_n\,\mathrm{Cos}\,(n\theta) + \beta_n\,\mathrm{Sin}\,(n\theta)\right] = -2U\,w\,(\theta,t)\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\ \mathrm{Cos}\,(n\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -2Uw(\xi,t)\,\mathrm{Sin}\,\xi\ \mathrm{Cos}\,(n\xi)\,d\xi \qquad (27)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\ \mathrm{Sin}\,(n\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -2Uw(\xi,t)\,\mathrm{Sin}\,\xi\ \mathrm{Sin}\,(n\xi)\,d\xi$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -2Uw(\xi,t)\,\mathrm{Sin}\,\xi\,d\xi$$

Akım fonksiyonun son hali

$$\psi_1(r,\theta,\xi) = \frac{-2U}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}w(\xi,t)\,\mathrm{Sin}(\xi)\,d\xi$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \mathrm{Cos}(n\theta)\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -2Uw(\xi,t)\,\mathrm{Sin}(\xi)\,\mathrm{Cos}(n\xi)\,d\xi\right] \quad (28)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \mathrm{Sin}(n\theta)[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} -2Uw(\xi,t)\,\mathrm{Sin}(\xi)\,\mathrm{Sin}(n\xi)\,d\xi]$$

Bu denklem daha basit olarak

$$\psi_1(r,\theta,\xi) = \frac{-2U}{\pi}\int_0^{2\pi} w(\xi,t)\,G(r,\theta,\xi)d\xi$$
$$G_1(r,\theta,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \mathrm{Cos}(n\theta)\,\mathrm{Sin}(\xi)\,\mathrm{Cos}(n\xi) \quad (29)$$
$$G_2(r,\theta,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \mathrm{Sin}(n\theta)\,\mathrm{Sin}(\xi)\,\mathrm{Sin}(n\xi)$$
$$G(r,\theta,\xi) = \frac{\mathrm{Sin}(\xi)}{2} + G_1(r,\theta,\xi) + G_2(r,\theta,\xi)$$

şeklinde yazılabilir. Basınç için kabuk üzerinde Lineerleştirilmiş Bernoulli denklemi yazılmalıdır

$$P = -\rho_f[\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + U\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}]\Big|_{r=R} \quad (30)$$

denklem (30) için

$$P = -\rho_f[\frac{-2U}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial w(\xi,t)}{\partial t}G(r,\theta,\xi)d\xi$$
$$-\frac{2U^2}{\pi}\int_0^{2\pi} w(\xi,t)\,\frac{\partial G(r,\theta,\xi)}{\partial\theta}d\xi] \quad (31)$$

denklemi yazılır.$G(r,\theta,\xi)$ için denklem (32) ve (33) ile verilen eşitlikler geçerlidir.

$$G(r,\theta,\xi)\Big|_{r=R} = G(\theta,\xi) = \frac{\mathrm{Sin}\,\xi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(1)^n\,\mathrm{Cos}(n\theta)\,\mathrm{Sin}\,\xi\,\mathrm{Cos}(n\xi)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n\,\mathrm{Sin}(n\theta)\mathrm{Sin}\,\xi\,\mathrm{Sin}(n\xi) \quad (32)$$

$$G(\theta,\xi) = \mathrm{Sin}\,\xi\,[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cos}(n\theta)\mathrm{Cos}(n\xi) + \mathrm{Sin}(n\theta)\mathrm{Sin}(n\xi)]$$
$$= \mathrm{Sin}\,\xi\,[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cos}[n(\theta-\xi)]] \tag{33}$$

Denklem (33) teki köşeli parantezdeki ikinci terimin hesaplanması için genelleştirilmiş Fourier Serisi, Dirac Delta ve Heaviside Fonksiyonlarının özellikleri kullanılmalıdır.Genelleştirilmiş Fourier Serisi denklem (34) ile verilir (Bracewell, 2000).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{Cos}(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{Sin}(n\theta)$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{Cos}(nx)dx \tag{34}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{Sin}(nx)dx$$

Denklem (34) için $f(x) = \delta(x-a)$ şeklinde bir fonksiyon göz önüne alınırsa

$$\delta(x-a) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{Cos}(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{Sin}(nx)$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x-a)dx = \frac{1}{\pi}H(x-a) = \frac{1}{\pi}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x-a)\mathrm{Cos}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\mathrm{Cos}(na) \tag{35}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{Sin}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\mathrm{Sin}(na)$$

ifadeleri geçerlidir. Denklemde geçen $\delta(x)$ ve $H(x)$ terimleri sırasıyla Dirac delta ve Heaviside fonksiyonlarıdır ve aşağıdaki özelliklere sahiptirler;

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$$
$$H(x-a) = \begin{cases} 1 & , x > a \\ 0 & , x < a \end{cases} \tag{36}$$

gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\delta(x-a)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Cos}\,(n\,x)\,\mathrm{Cos}\,(na)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sin}\,(n\,x)\,\mathrm{Sin}\,(na)$$
$$\delta(x-a)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Cos}[n(x-a)] \tag{37}$$

(37) nolu denklemde $x \to \theta$ ve $a \to \xi$ yapılarak denklem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Cos}[n(\theta-\xi)]=-\frac{1}{2}+\pi\,\delta(\theta-\xi) \tag{38}$$

ifadesine ulaşılır. Bu denklem (33)'e yazılarak düzenlenirse

$$G(\theta,\xi)=\mathrm{Sin}\,\xi\,[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\pi\,\delta(\theta-\xi)]=\pi\,\delta(\theta-\xi)\mathrm{Sin}\;\xi$$
$$\frac{\partial G(\theta,\xi)}{\partial\theta}=\pi\;\mathrm{Sin}(\xi)\;\frac{\partial\delta(\theta-\xi)}{\partial\theta}=\pi\;\delta'(\theta-\xi)\mathrm{Sin}\,\xi \tag{39}$$

olarak bulunur. (39) denklemindeki eşitlikler önce (32) ve (33) denklemlerine ve ardından (31) denklemine yazılırsa kabuk üzerinde meydana gelen basınç için denklem (40)' a ulaşılır.

$$P=-\rho_f[\frac{-2U}{\pi}\int_0^{2\pi}\pi\;\mathrm{Sin}(\xi)\;\delta(\theta-\xi)\frac{\partial w(\xi,t)}{\partial t}d\xi$$
$$-\frac{2U^2}{\pi}\int_0^{2\pi}w(\xi,t)\pi\;\mathrm{Sin}(\xi)\;\delta'(\theta-\xi)d\xi]$$
$$P=2U\rho_f[\int_0^{2\pi}\mathrm{Sin}(\xi)\;\delta(\theta-\xi)\frac{\partial w(\xi,t)}{\partial t}d\xi+U\int_0^{2\pi}w(\xi,t)\;\mathrm{Sin}(\xi)\;\delta'(\theta-\xi)d\xi] \tag{40}$$

Kabuktaki y ve z yönlerindeki çökmeler sırasıyla $v(\theta,t)=v(\theta)\,e^{i\omega t}$ ve $w(\theta,t)=w(\theta)\,e^{i\omega t}$ olarak verilsin Bu çökmeler (40) denklemine yazılırsa silindirik kabuğa etkiyen basıncı zamana bağlı olarak veren denklem

$$P=2U\rho_f\;e^{i\omega t}[\int_0^{2\pi}i\,\omega\,w(\xi)\mathrm{Sin}(\xi)\;\delta(\theta-\xi)d\xi+U\int_0^{2\pi}w(\xi)\;\mathrm{Sin}(\xi)\;\delta'(\theta-\xi)d\xi] \tag{41}$$
$$P=2U\rho_f\;e^{i\omega t}[i\,\omega\,w(\theta)\mathrm{Sin}(\theta)+U\left\{\frac{\partial w(\theta)}{\partial\theta}\;\mathrm{Sin}(\theta)+w(\theta)\mathrm{Cos}(\theta)\right\}]$$

olacaktır.

SONUÇ

Mevcut çalışmada gibi x yönünde sonsuz uzun olan ve bu yön boyunca iki ucundan basit mesnetlenmiş bir silindirik kabuğun üzerinden akışkan geçişi sırasında meydana gelen basınç analitik olarak bulunmuştur. Göz önüne alınan kabuk malzemesi lineer elastik, homojen ve izotropiktir. Rijit olan xy düzlemine oturan kabuktan uzakta akışkan y yönünde sabit U hızıyla akmaktadır ve akış potansiyellidir. Bulunan basınç ifadesi ilerleyen çalışmalarda kabuğun akış kaynaklı titreşimi olayını incelemekte kullanılabilir.

REFERANSLAR

Leissa, A.W., (1973), *Vibration of Shells, 1st ed.*, Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C. USA Library of Congress Catalogue Card Number 77-186367

Yao, X., 2016, Exact free vibration analysis of open circular cylindrical shells by the method of reverberation-ray matrix, *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering)*, 17 (4), 295-316

Blevins, R.D., (2016), *Formulas for dynamics, acoustics and vibration*, 1st ed., John wiley & sons ltd., U.K. , ISBN: 978-1-119-03811-5

Bracewell R.N., 2000, *The fourier transform and its applications*, 3rd ed., McGraw hill inc., Singapore, ISBN: 0-07-303938-1

Durak, B., (2018), Kabuk yapılarda akışkan-elastik cisim etkileşiminin teorik incelenmesi, Doktora Tezi, İstanbul: İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.