Nonlineer Diferansiyel Denklemlerin Subdomain Yöntemiyle Çözümü

Birkan DURAK[1*]

Erol UZAL[2]

[1] İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, Uçak Teknolojisi Programı, birkand@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0002-8196-5407
[2] İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü, euzal@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0003-0008-1376
*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Birkan DURAK , birkand@iuc.edu.tr

ÖZET

Mühendislik ve doğa bilimlerindeki kaotik süreçler ve bazı problemler lineer olmayan diferansiyel denklemlerle ifade edilirler. Her ne kadar bazı değişken değiştirmeler veya çeşitli kabuller sayesinde nonlineer denklemler lineer hale getirilerek çözülebilse de bu tekniklerin her tür probleme uygulanmasında önemli sorunlarla karşılaşılabilir. Bu noktada sayısal yöntemlerle çözümler bulmak gerekecektir.

Bu çalışmada lineer olmayan başlangıç ve sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden birisi olan subdomain (alt bölge) yöntemiyle bulunmuştur. Test problemlerinde verilmiş olan diferansiyel denklemler homojen ve lineer olmayan bir denklem sistemine dönüştürülmüş ve ardından bu sistemin çözümü ile yaklaşık çözüm katsayılarının hesaplanmıştır.

İncelenen test problemlerine göre alt bölge yöntemiyle bulunan çözümlerde nokta bazında yapılan mutlak hatalar yeterince küçük olmaktadır. Alt bölge sayısının arttırılması bu hataları azaltmaktadır. Yöntem sayesinde bir problemin analitik çözümü bulunabilmiştir. Subdomain yönteminde kullanılan integraller simgesel matematik yazılımları ile hesaplanmıştır. Polinomları yaklaşık çözüm olarak seçmek bu yöntemde işlem kolaylığı sağlamaktadır. Bu sayede basit algoritmalar ile yaklaşık çözümler elde edilmiştir.

Problemlerin lineer olmaması yaklaşık çözüm katsayılarının değerlerinin birden fazla olması durumuna sebep olmaktadır. En küçük reel katsayılar kullanılarak oluşturulan yaklaşık çözümdeki mutlak hatalar daha azdır.

Lineer olmayan diferansiyel denklemi göz önüne alınan alt bölgelerde yararlanarak sadece önerilen yaklaşık çözümün katsayılara bağlı nonlineer bir denklem sistemine dönüştürerek çözmeye yarayan yöntem ile uygun çözümler elde edilebilmiştir. Subdomain (Alt bölge) yöntemi ilerleyen çalışmalarda kesir türevli lineer, nonlineer diferansiyel denklem ya da denklem sistemlerine uygulanabilir.

Anahtar Kelimeler – Subdomain, Ağırlıklı Kalanlar, Yaklaşık Çözüm, Sayısal Analiz, Nonlineer Diferansiyel Denklem.

GİRİŞ

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerle mühendislik, fizik, kimya biyoloji vb. çeşitli bilim dallarındaki problemlerin incelenmesi sırasında karşılaşılır. Örneğin akışkanlar mekaniğinde Blasius denklemi sabit tek yönlü bir akışa paralel tutulan yarı sonsuz bir plaka üzerindeki oluşan kararlı iki boyutlu laminer sınır tabakayı tanımlar. Bu problemin çözümü için çeşitli

sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Mevcut çalışmada öncelikle Subdomain (Alt bölge) yöntemi tanıtılmıştır. Ardından yöntem literatürden alınan çeşitli nonlineer diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmakta kullanılmıştır.

1- Subdomain (Alt bölge) Yöntemi

Homojen olmayan nonlineer bir sınır değer problemi x' e bağlı değişken y olmak üzere

$$\begin{aligned} &y^{(m)} + y^k + f\,(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) = 0 \\ &y(x_1) = a \\ &y(x_2) = b \end{aligned} \tag{1}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu denklemde $y^{(m)}$ bağımlı değişkenin x' e göre m. türevini gösterirken y^k terimi ise değişkenin k. kuvvetini göstermektedir. (1) numaralı denkleme subdomain (alt bölge) yöntemi uygulanırken problemin yaklaşık çözümünün

$$y_{yaklaşık} = \sum_{n=0}^{N} C_n x^n \tag{2}$$

olduğu kabul edilerek denklem (1)'e yazılır ve kalan

$$R(x) = y^{(m)}_{yaklaşık}(x) + y^k_{yaklaşık}(x) + g(x) \tag{3}$$

şeklinde bulunur. Denklem (3)'teki $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$ katsayılarının bulunması için aşağıdaki eşitliğin meydana getireceği homojen denklem sistemi kurularak çözülmelidir.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R(x)dx = 0 \quad , \quad x_i, x_{i+1} \in (x_1, x_2) \tag{4}$$

Denklem (4)'te bilinmeyen C_N katsayısı kadar denklem vardır ve kurulan bu nonlineer denklem sistemi bilinen yöntemlerden birisiyle çözülmelidir.

2- Yöntemin Diferansiyel Denklemlerin Çözümüne Uygulanması

Yöntemi aşağıda verilen başlangıç değer problemine uygulayalım (Hermann ve Saravi, 2016)

$$\begin{aligned} &y''(x) + y^2 = 0 \\ &y(0) = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Bu problemin gerçek çözümü $y(x) = \frac{1}{(1+x)}$ dir. Yaklaşık çözümün

$$y = \sum_{n=0}^{5} C_n x^n \tag{6}$$

şeklinde olduğu kabul edilsin. Denklem (5) daki başlangıç değer şartı uygulanırsa denklem (6) ile verilen yaklaşık çözümün

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{2} C_n x^n \tag{7}$$

olacağı sonucuna ulaşılır. Denklem (7) daki bilinmeyen C_1, C_2, C_3 ve C_4 katsayılarının bulunması için dört adet denkleme ihtiyaç vardır. Bunun için öncelikle problemdeki bağımsız değişken için $0 < x < 1$ olduğu kabul edilir. Ardından bu aralık beş alt bölgeye bölünür. Bu problem için kalan denklem (8) deki gibidir.

$$R(x) = C_1 + 2xC_2 + 3x^2C_3 + 4x^3C_4 + 5x^4C_5 + (1 + xC_1 + x^2C_2 + x^3C_3 + x^4C_4 + x^5C_5)^2 \tag{8}$$

Böylece yöntemde kullanılacak olan integraller sırasıyla

$$\begin{aligned} &\int_0^{0.2} R(x)dx \\ &\int_{0.2}^{0.4} R(x)dx \\ &\int_{0.4}^{0.6} R(x)dx \\ &\int_{0.6}^{0.8} R(x)dx \\ &\int_{0.8}^{1} R(x)dx \end{aligned} \tag{9}$$

olacaktır. Denklem (9) daki her bir ifade sıfıra eşitlenerek oluşturulan denklem sisteminin çözümü ile yaklaşık çözümdeki katsayılar aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} C_1 &= -24.609 & C_1 &= -0.996 \\ C_2 &= 257.491 & C_2 &= 0.952 \\ C_3 &= -920.459 & C_3 &= -0.770 \\ C_4 &= 1336.347 & C_4 &= 0.418 \\ C_5 &= -676.799 & C_5 &= -0.105 \end{aligned} \tag{10}$$

Bu katsayılardan en küçük olanlarının bulunduğu ikinci grup problem için uygun yaklaşık çözümü verecektir. O halde çözüm

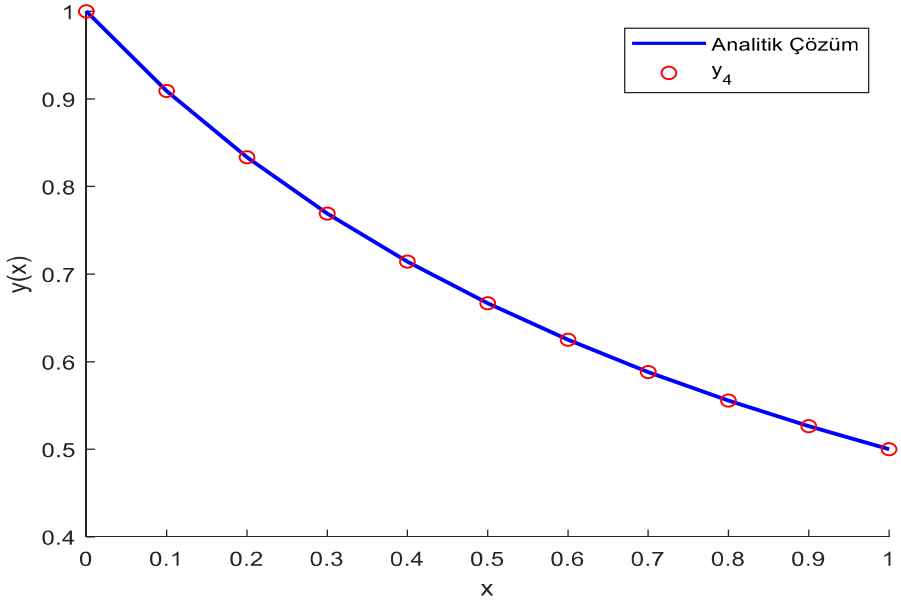
$$y_5(x) = -0.105x^5 + 0.418x^4 - 0.770x^3 + 0.952x^2 - 0.996x + 1 \tag{11}$$

olmaktadır. Ayrıca altıncı ve yedinci dereceden polinomlar kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümler sırasıyla

$$y_6(x) = 0.07x^6 - 0.31x^5 + 0.66x^4 - 0.89x^3 + 0.98x^2 - 0.99x + 1 \quad (12)$$

$$y_7(x) = -0.04x^7 + 0.24x^6 - 0.55x^5 + 0.82x^4 - 0.95x^3 + 0.99x^2 - 0.99x + 1 \quad (13)$$

şeklindedir. Şekil 1 de kesin çözüm ve önerilen beşinci dereceden yaklaşık çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 1: Birinci başlangıç değer problemi için kesin ve yaklaşık çözümler

Tablo 1 de ise yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar farklı x değerleri ve çeşitli alt bölgeler için verilmiştir. Tablodaki N çözüm için kullanılan alt bölge saysını göstermektedir.

Tablo 1: Birinci başlangıç değer problemi için yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar

x	Mutlak Hatalar		
	N=5	N=6	N=7
0.0	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	$7.01\text{x}10^{-5}$	$1.11\text{x}10^{-5}$	$1.50\text{x}10^{-6}$
0.2	$1.76\text{x}10^{-5}$	$6.57\text{x}10^{-6}$	$1.39\text{x}10^{-6}$
0.3	$3.71\text{x}10^{-5}$	$3.94\text{x}10^{-5}$	$2.48\text{x}10^{-7}$
0.4	$8.66\text{x}10^{-6}$	$3.82\text{x}10^{-7}$	$2.01\text{x}10^{-7}$
0.5	$7.13\text{x}10^{-6}$	$1.76\text{x}10^{-6}$	$5.54\text{x}10^{-7}$
0.6	$9.06\text{x}10^{-6}$	$3.35\text{x}10^{-6}$	$1.10\text{x}10^{-7}$
0.7	$2.71\text{x}10^{-5}$	$4.32\text{x}10^{-7}$	$1.49\text{x}10^{-7}$
0.8	$4.34\text{x}10^{-6}$	$1.27\text{x}10^{-6}$	$8.30\text{x}10^{-7}$
0.9	$4.96\text{x}10^{-5}$	$1.02\text{x}10^{-5}$	$1.20\text{x}10^{-6}$
1.0	$1.09\text{x}10^{-5}$	$1.57\text{x}10^{-7}$	$3.77\text{x}10^{-7}$

Subdomain yöntemi yüksek mertebeden başlangıç değer problemlerine de uygulanabilir (Hosseini, vd., 2015).

$$y''(x)+\frac{2}{x}y'(x)+y^5$$
$$y(0)=1 \qquad y'(0)=0 \tag{14}$$

Bu problem için çözüm

$$y_{gerçek}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}} \tag{15}$$

şeklindedir. Bu problemin başlangıç değerlerini de sağlayan yaklaşık çözümü üçüncü dereceden bir polinom olarak aşağıdaki gibi olsun

$$y(x)=1+\sum_{n=2}^{3}C_n x^n \tag{16}$$

Buna göre kalan

$$R(x)=2C_2+6xC_3+\frac{2(2xC_2+3x^2C_3)}{x}+(1+x^2C_2+x^3C_3)^5 \tag{17}$$

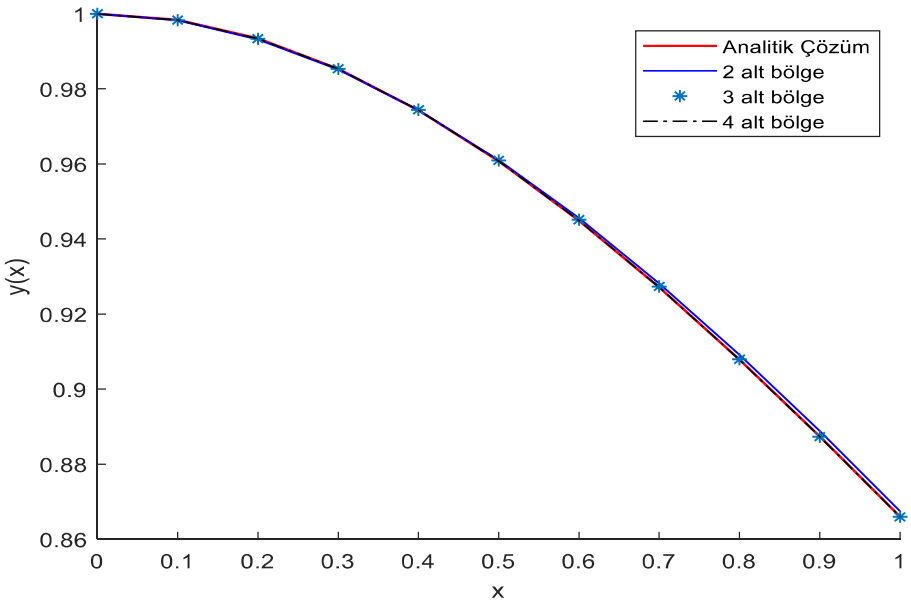
olacaktır. C_2 ve C_3 katsayılarını verecek olan denklem sistemi ise iki alt bölge kullanılarak kurulur ve çözülürse yaklaşık çözüm

$$y_2(x)=0.0467493689764375x^3-0.179323576897046x^2+1 \tag{18}$$

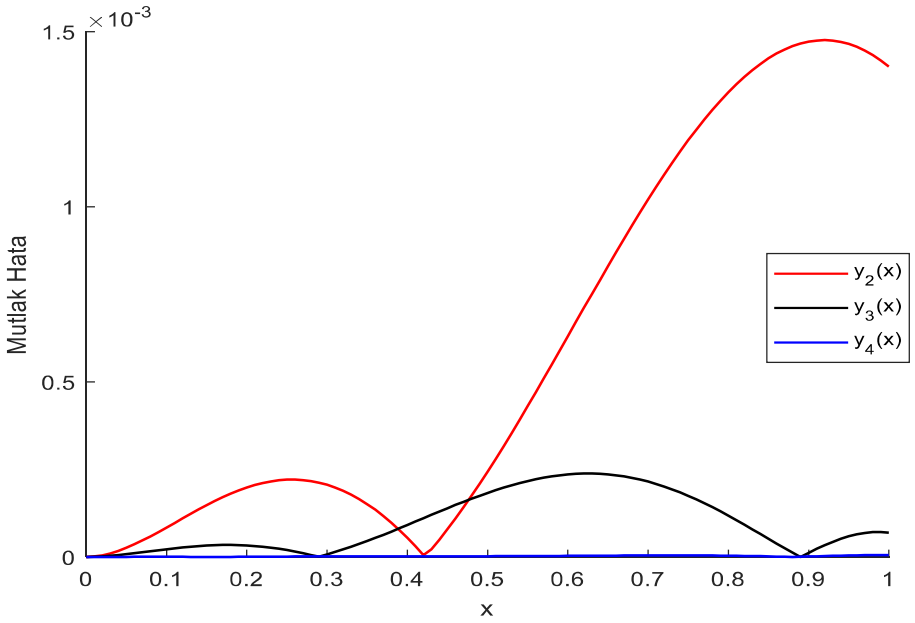
şeklinde bulunur. Bu problemde integraller üç ve dört altbölge kullanılarak hesaplanırsa bulunacak yaklaşık çözümler sırasıyla

$$y_3(x)=0.01517229x^4+0.0215385721x^3-0.17075520x^2+1 \tag{19}$$
$$y_4(x)=-0.015867x^5+0.050645x^4-0.0022x^3-0.16647x^2+1 \tag{20}$$

olacaktır. Şekil 2 de iki alt bölge için bulunan yaklaşık çözüm kesin çözümle karşılaştırılmıştır. Şekil 3 ise farklı alt bölgeler için yapılan mutlak hataları göstermektedir.



Şekil 2: İkinci başlangıç değer problemi için kesin ve yaklaşık çözümler



Şekil 3: İkinci başlangıç değer problemindeki mutlak hatalar

Subdomain yöntemi sınır değer problemlerine de uygulanabilir. Bunun için aşağıda verilen nonlineer diferansiyel denklemi inceleyelim (Yarcı, 2008).

$$y''(x) - \frac{1}{2}y^3(x) = 0$$

$$y(1) = \frac{2}{3} \quad , \quad y(3) = \frac{2}{5} \tag{21}$$

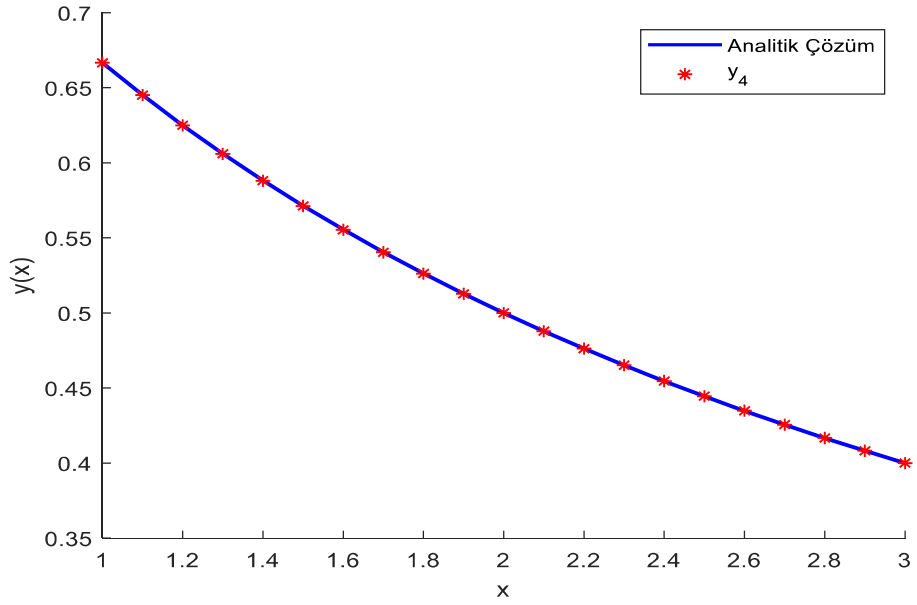
Bu problemin analitik çözümü $\frac{2}{2+x}$ dir. Problemin yaklaşık çözümü dördüncü dereceden bir polinom olarak kabul edilir ve ardından sınır değer şartları uygulanırsa

$$y(x) = (\frac{4}{5} + 3C_2 + 12C_3 + 39C_4) + (-\frac{2}{15} - 4C_2 - 13C_3 - 40C_4)x + \sum_{n=2}^{4} C_n x^n \qquad (22)$$

çözümüne ulaşılır. Bu denklemdeki C_2, C_3, C_4 katsayılarının bulunması için 3 alt bölge seçilir ve gerekli işlemler yapılarak yaklaşık çözüm

$$y_4(x) = 0.0021751894511698x^4 - 0.026197357845716x^3 + 0.13617593227665x^2 - 0.4244789884924x + 0.9789918912769 \qquad (23)$$

olarak bulunur. Bu problem için çözümlerin karşılaştırılması Şekil 4 ile verilirken yaklaşık çözümdeki mutlak hatalar Tablo 2 de verilmiştir.



Şekil 4: Üçüncü problem için analitik ve yaklaşık çözümler

Tablo 2: Birinci Sınır değer problemi için yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar

x	$y_{Analitik}$	$y_{yaklaşık}$	Mutlak Hata
1.0	0.666667	0.666667	$1.11\text{x}10^{-16}$
1.2	0.625000	0.624952	$4.81\text{x}10^{-5}$
1.4	0.588235	0.588097	$1.38\text{x}10^{-4}$
1.6	0.555556	0.555387	$1.68\ \text{x}10^{-4}$
1.8	0.526316	0.526191	$1.24\text{x}10^{-4}$
2.0	0.500000	0.499962	$3.81\text{x}10^{-4}$
2.2	0.47619	0.476235	$4.48\text{x}10^{-5}$
2.4	0.454545	0.454631	$8.55\text{x}10^{-5}$
2.6	0.434783	0.434852	$6.93\text{x}10^{-5}$
2.8	0.416667	0.416685	$1.82\text{x}10^{-5}$
3.0	0.400000	0.400000	$1.11\text{x}10^{-16}$

Başka bir örnek için farklı araştırmacılarca çalışılan aşağıdaki problem incelensin (Jafari ve Daftardar-Gejji, 2006; Ertürk ve Momani, 2007).

$$\begin{aligned} &y''(x) + y^2(x) = x^4 + 2 \quad , \qquad 0 < x < 1 \\ &y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 1 \end{aligned} \tag{24}$$

verilen denklemin analitik çözümü x^2 dir. Yöntem uygulanırken beşinci dereceden bir polinom yaklaşık çözüm olarak kabul edilirse, integraller üç alt bölgeye ayrılarak hesaplanır ve ardından bulunan denklem sisteminin çözülmesiyle yaklaşık çözümdeki katsayılar bulunacaktır. Buna göre subdomain yöntemiyle yaklaşık çözüm x^2 olarak bulunur ki bu aynı zamanda analitik çözümdür.

Subdomain yöntemi nonlineer ve değişken katsayılı diferansiyel denklemlere de uygulanabilir. Aşağıdaki problem bu yöntemle çözülsün. (Yanfei vd., 2020).

$$\begin{aligned} &y''(x) - \frac{y^3 - 2y^2}{2x^2} = 0 \\ &y(1) = 1 \quad , \quad y(2) = \frac{4}{3} \end{aligned} \tag{25}$$

Problemin analitik çözümü $\frac{2x}{x+1}$ dir. Bu problemin yaklaşık çözümü

$$y(x) = \sum_{n=0}^{4} C_n x^n \tag{26}$$

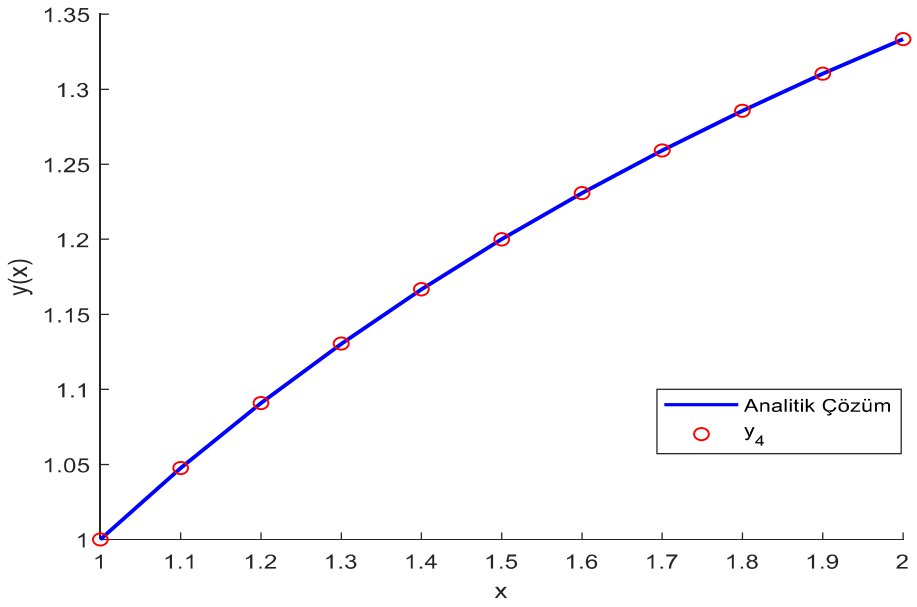
olsun bu çözüme denklem (25) ile verilen sınır şartları uygulanırsa çözüm

$$y(x) = \left(\frac{2}{3} + 2C_2 + 6C_3 + 14C_4\right) + \left(\frac{1}{3} - 3C_2 - 7C_3 - 15C_4\right)x + \sum_{n=2}^{4} C_n x^n \qquad (27)$$

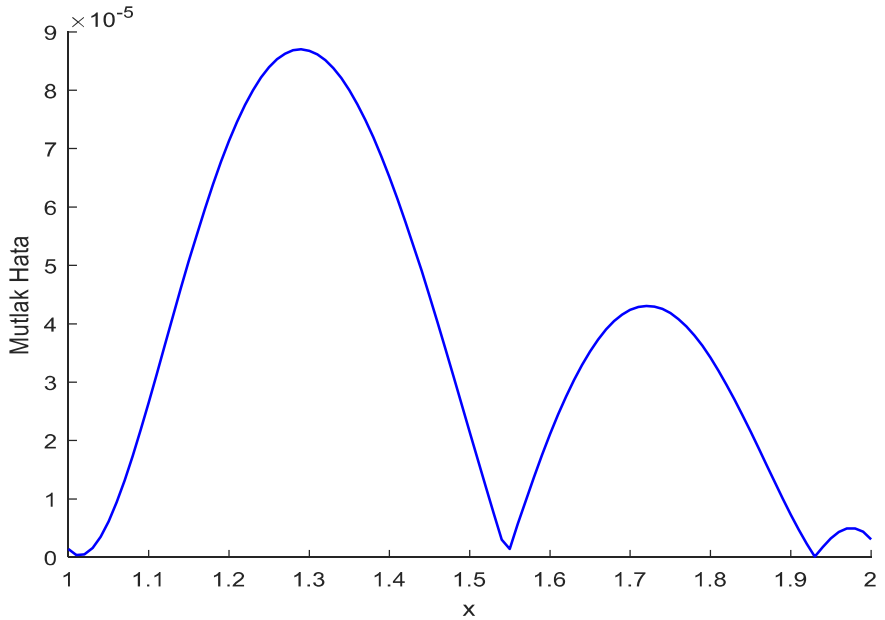
haline gelir. Bu çözüm denklem (25) te yerine yazılıp üç alt bölge kullanılması durumunda bulunan yaklaşık çözüm

$$y_4(x) = -0.0219245698848x^4 + 0.1867697891883x^3 - 0.6724115401238x^2 + 1.3720479776594x + 0.13551834316 \qquad (28)$$

olmaktadır. Şekil 5 ve Şekil 6 sırasıyla çözümleri ve yapılan mutlak hataları göstermektedir.



Şekil 5: Son problem için analitik ve yaklaşık çözümler



Şekil 6: Son problemde meydana gelen mutlak hatalar

SONUÇ

Bu çalışmada lineer olmayan başlangıç ve sınır değer problemlerine Subdomain (alt bölge) yöntemiyle uygun yaklaşık çözümler bulunmuştur. Seçilen test problemleri göz önüne alındığında yöntemle problemler için nokta bazında yapılan mutlak hatalar yeterince küçük olmaktadır. Yöntem göz önüne alınan bir problemin analitik çözümünün bulunmasını da sağlamıştır. Subdomain yönteminde kullanılan integrallerin hesabı simgesel matematik yazılımlarıyla yapılmıştır. Alt bölge yöntemi süreksizliğe sahip malzeme titreşimlerini incelemekte ve ayrıca nonlineer denklem veya denklem sistemelerinin yaklaşık çözümlerini bulmakta da kullanılabilir.

REFERANSLAR

Ertürk, V.S. and Momani, S. (2007). Differential transform method for obtaining positive solutions for two-point nonlinear boundary value problems, *International Journal: Mathematical Manuscripts*, 1(1). 65-72.

Hermann, M. and Saravi, H. (2016). *Nonlinear ordinary differential equations : Analytical Approximation and Numerical Methods.* 1 st ed.. India : Springer. ISBN: 8132238451

Hosseini, S.Gh. and Abbasbandy, S. (2015). Solution of lane-emden type equations by combination of the spectral method and adomian decomposition method. *Mathematical Problems in Engineering,* Volume 2015, Article ID 534754

Jafari, H. and Daftardar-Gejji, V. (2006). Positive solutions of nonlinear fractional boundary value problems using Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation,* 180(2), 700-706.

Yanfei, L., Qingfei, Y., Hongyi, L., Hongli, S., Yunlei, Y. and Muzhou, H. (2020) Solving higher order nonlinear ordinary differential equations with least squares support vector machines, *Journal of Industrial And Management Optimization,* 16(3), 1481- 1502.

Yarcı, H., (2008), On the Solutions of Non-Linear Boundary Value Problems , Yüksek Lisans Tezi, İzmir: Dokuz Eylül University Graduate School of Natural and Applied Sciences.