5th International Conference on Engineering and Applied Natural Sciences

August 25-26, 2024 : Konya, Turkey

© 2024 Published by All Sciences Academy

https://www.iceans.org/

Plaka Serbest Titreşiminin Momentler Yöntemiyle İncelenmesi

Birkan DURAK[1*]

[1] Elektrik ve Enerji Bölümü, İklimlendirme Soğutma Teknolojisi Programı / Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Türkiye

[*](birkand@iuc.edu.tr)

Özet – Mühendislikte çok farklı amaçlarla ve geniş olarak plakalar kullanılmaktadır. İnşaat ve makine mühendisliğinde tavan veya taban elemanı olarak kullanılan plakalar bu kullanımları sırasında çeşitli titreşimlere maruz kalırlar. Özellikle roketler, uydular ve hava taşıtları da hareketleri sırasında titreşimlere maruz kalmaktadırlar. Bu kapsamda hemen hemen her türlü mühendislik alanında titreşim hareketinin incelenmesi önemli bir konudur. Bu inceleme hem titreşimin doğası hakkında önemli bilgiler verir hem de alınabilecek önemlere dair tasarım ve üretim mühendislere kolaylıklar sağlar. Bu çalışmada incelenen plaka h_p kalınlığında ve b genişliğindedir. İki kenarı boyunca basit mesnetlenmiş z yönünde sonsuz uzun bu plakanın serbest titreşimi incelenmiştir. Öncelikle plakanın serbest titreşiminin öz değerleri analitik olarak hesaplanmıştır. Ardından Momentler yönetimi tanıtılarak serbest titreşim öz değerleri bu yöntemle de hesaplanmıştır. Momentler yöntemi, ağırlıklı kalanlar yöntemleri sınıfına aittir. Yöntem uygulanırken önerilen yaklaşık çözümün diferansiyel denkleme yazılmasıyla kalan oluşturulur. Bu kalan problemin değişkeninin kuvvetleri ile çarpılarak sınırlarda integre edilerek sıfıra eşitlenir. Değişkenin farklı bir kuvvet ile çarpma ve integral alma işlemi yeni bir denklem verecektir. Bu işlem yaklaşık çözümdeki bilinmeyen katsayıların sayısı kadar tekrarlanarak homojen bir denklem sistemine ulaşılır. Bu sistemin matris gösteriminde katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek öz değerler bulunur. Yaklaşık çözümde polinom seçilerek basit integral ve programlama adımları ile çözümler elde edilebilmiştir. Yöntem uygulanırken farklı değişken kuvvetleri kullanılmasının çözüm hassasiyetine olan etkisi de değerlendirilmiştir. Sayısal sonuçlar göstermektedir ki Momentler yöntemiyle plakanın bulunan ilk üç değeri hesabının sonucunda yapılan bağıl hatalar sırasıyla ω_1 ve ω_2 için $7.4\text{x}10^{-6}$ iken ω_3 için $6.40\text{x}10^{-6}$ olmaktadır.

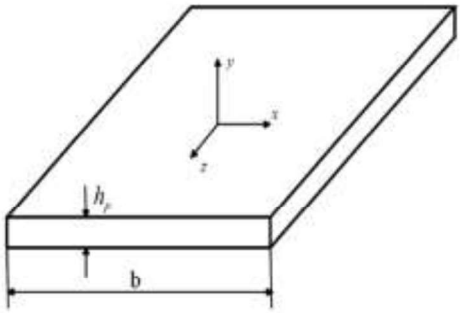
Anahtar Kelimeler – Plaka, Serbest Titreşim, Öz değer, Ağırlıklı Kalanlar, Momentler Yöntemi

I. GİRİŞ

Mühendislikte çok farklı amaçlarla ve geniş olarak plakalar kullanılmaktadır. Makine ve inşaat mühendisliğinde tavan veya taban elemanı olarak kullanılan plakalar bu kullanımları sırasında çeşitli titreşimlere maruz kalırlar. Özellikle roketler, uydular ve hava taşıtları da hareketleri sırasında titreşimlere maruz kalmaktadırlar. Bu kapsamda hemen hemen her türlü mühendislik alanında titreşim hareketinin incelenmesi önemli bir konudur. Bu inceleme hem titreşimin doğası hakkında önemli bilgiler verir hem de alınabilecek önemlere dair tasarım ve üretim mühendislere kolaylıklar sağlar.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışmada incelenen Şekil 1 deki plaka h_p kalınlığında ve b genişliğindedir. İki kenarı boyunca basit mesnetlenmiş z yönünde sonsuz uzun bu plakanın serbest titreşimi tek boyutlu olarak incelenmiştir. Öncelikle öz değerler analitik olarak hesaplanacaktır. Daha sonra Momentler yöntemi tanıtılarak öz değerler bu yöntemle de bulunacaktır.



Şekil 1. Sonsuz uzun plaka

A. Plaka Serbest Titreşiminin Analitik Çözümü

İncelenen plakanın hareket denklemi aşağıdaki gibidir [1], [2], [3].

$$D\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}+\rho_p h_p \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{1}$$

D plaka eğilme rijitliği olarak adlandırılır. E Elastite modülü, h_p plaka kalınlığı ve ν ise possion oranı olmak üzere eğilme rijitliği.

$$D=\frac{Eh_p{}^3}{12(1-\upsilon^2)} \tag{2}$$

formülü ile hesaplanır. Plakanın yoğunluğu ρ_p dir. ω serbest titreşimin öz değeri olmak üzere plaka yer değiştirmesi $\mathrm{V}=\mathrm{v}(x)e^{i\omega t}$ şeklinde olsun. Yer değiştirme denklem (1) de yazılarak, denklem (3) ile verilen diferansiyel denkleme ulaşılır.

$$\begin{aligned} &D\frac{d^4 v}{dx^4}-\omega^2\rho_p h_p v=0 \\ &v(-1/2)=v(+1/2)=0 \\ &\frac{d^2 v}{dx^2}(-1/2)=\frac{d^2 v}{dx^2}(+1/2)=0 \end{aligned} \tag{3}$$

Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$\begin{aligned} &v(x)=C_1\,\mathrm{Cos}(kx)+C_2\,\mathrm{Sin}(kx)+C_3\,\mathrm{Cosh}(kx)+C_4\,\mathrm{Sinh}(kx) \\ &k=\sqrt[4]{\frac{\omega^2\rho_p h_p}{D}} \end{aligned} \tag{4}$$

şeklindedir. Bu çözüme sınır şartları uygulanırsa C_1, C_2, C_3, C_4 katsayılarını içeren bir homojen denklem sistemine ulaşılır. Bu sistem denklem (5) ile verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \cos(k/2) & \sin(k/2) & \cosh(k/2) & \sinh(k/2) \\ \cos(-k/2) & \sin(-k/2) & \cosh(-k/2) & \sinh(-k/2) \\ -\cos(k/2) & -\sin(k/2) & \cosh(k/2) & \sinh(k/2) \\ -\cos(-k/2) & -\sin(-k/2) & \cosh(-k/2) & \sinh(-k/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Bu denklem sisteminde $C_1, C_2, C_3, C_4 \neq 0$ şeklinde bir çözüm olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Buna göre $\upsilon = 0.3$, $E = 70 \,.10^9 N/m^2$, $h_p = 0.01\, m$, $\rho_p = 2720\, kg/\, m^3$ değerlerine sahip bir plakanın ilk üç öz değeri $\omega_1 = 151.5130$, $\omega_2 = 606.0520$ ve $\omega_3 = 1363.6170$ olacaktır.

B. Plaka Serbest Titreşiminin Momentler Yöntemiyle İncelenmesi

Momentler yöntemi, ağırlıklı kalanlar yöntemleri sınıfına aittir. Yöntem uygulanırken önerilen yaklaşık çözümün diferansiyel denkleme yazılmasıyla kalan oluşturulur. Bu kalan problem değişkeninin kuvvetleri ile çarpılarak sınırlarda integre edilir ve sıfıra eşitlenir. Değişkenin farklı bir kuvveti ile çarpma ve integral alma işlemi yeni bir denklem verecektir. Bu işlem yaklaşık çözümdeki bilinmeyen katsayıların sayısı kadar tekrarlanarak homojen bir denklem sistemine ulaşılır. Bu sistemin matris gösterimindeki katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek öz değerler bulunur. Denklem (3) ün yaklaşık çözümü aşağıdaki gibi olsun

$$v(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \Omega_n (x) \quad (6)$$

burada $\Omega_n(x)$ deneme (test) fonksiyonlarıdır ve sınır şartlarını sağlayan herhangi bir fonksiyon olabilir. örneğin

$$\Omega_n(x) = x^{n+3} - \frac{(2n+1)}{(4n-2)} x^{n+1} + \frac{(2n+3)}{16(2n-1)} x^{n-1} \quad (7)$$

şeklinde bir polinom ailesi olsun. Denklem (7) ve (6) hareket denklemi olan (3) te yerine yazılarak momentler yönteminde kullanılacak olan kalan

$$R_n(x) = D\left(\sum_{n=1}^{N} C_n \frac{d^4 \Omega_n(x)}{dx^4} \right) - \omega^2 \rho_p h_p \left(\sum_{n=1}^{N} C_n \Omega_n(x) \right) \quad (8)$$

olarak bulunur. Denklem (8) deki ω ların bulunması için

$$R_{nk} = \int_{-1/2}^{1/2} R_n(x) x^k dx = 0\,, \qquad k = 0,1,2,3,\ldots.\,, \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots,N \quad (9)$$

ile verilen homojen denklem sistemi oluşturulur. İntegrasyonun sınırları plaka hareket denklemindeki sınırlardır. R_{nk} ifadesi C_n ve ω ' nın fonksiyonudur. Dolasıyla (9) ile verilen denklem sistemi

$$[R_{nk}(\omega^2)]_{NxN} [C_n]_{Nx1} = [0]_{Nx1} \quad (10)$$

olarak matris formunda yazılabilir. Plaka çökmesinin sıfır olması problem açısından anlamsız olacağından (6) denklemindeki C_n'lerin sıfırdan farklı olması gerekir. Bu durum ise denklem (10) daki ilk matrisin determinantının sıfır olmasıyla sağlanır. Yani

$$det[R_{nk}(\omega^2)] = 0 \tag{11}$$

olmalıdır. Bu determinant sadece ω ' nın fonksiyonu olduğundan determinantın kökleri plakanın serbest titreşimindeki öz değerleri verecektir. $N = 2$ için denklem (6) ya göre plakanın çökmesi

$$v(x) = \sum_{n=1}^{2} C_n \Omega_n(x) = C_1\Omega_1(x) + C_2\Omega_2(x) \tag{12}$$

olur. Denklem (12) deki $\Omega_1(x)$ ve $\Omega_2(x)$ fonksiyonları denklem (7) den hesaplanacaktır. Böylece kalan

$$R_n(x) = \sum_{n=1}^{2} DC_n \left[\frac{d^4\Omega_1(x)}{dx^4} + \frac{d^4\Omega_2(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho_p h_p \left(\Omega_1(x) + \Omega_2(x)\right) \right] \tag{13}$$

katsayıları verecek olan denklem sisteminin kapalı gösterimi ise

$$R_{nk} = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{2} DC_n \left[\frac{d^4\Omega_1(x)}{dx^4} + \frac{d^4\Omega_2(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho_p h_p \left(\Omega_1(x) + \Omega_2(x)\right) \right] \right) x^k dx = 0\,, k = 0{,}1 \tag{14}$$

şeklindedir. Analitik çözümde verilen plaka değerleri olan D, ρ_p ve h_p denklem (14) te yerine yazılarak integraller alınırsa bulunacak denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} 153846 - 5.44\omega^2 & 0 \\ 0 & 64102.6 - 0.107937\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

olur. Denklem (15) teki ilk matrisin determinantı $0.587175\omega^4 - 365324\omega^2 + 9.86194x10^9$ dur. Bu determinantın kökleri olan $\omega_{1,2} = \pm 770.644$ ve $\omega_{3,4} = \pm 168.168$ değerleri ise plaka titreşimdeki öz değerlerdir. Bu öz değerler analitik hesapla elde edilenlere eşit olan kadar N arttırılarak hesaplamaya devam edilir.

III. BULGULAR

N'nin farklı değerleri için hesaplanan ilk üç öz değer Tablo 1. de verilmiştir.

Tablo 1. Öz değerlerin analitik ve momentler yöntemiyle bulunan değerleri

Öz değer	Analitik	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6	N = 7	N = 8	N = 9
ω_1	151.5130	168.1682	151.5589	151.5589	151.5141	151.5141	151.5141	151.5141	151.5141
ω_2	606.0520	770.6437	770.6437	608.6223	608.6223	606.0675	606.0675	606.0565	606.0565
ω_3	1363.6170	---	2023.5313	2023.5313	1386.8161	1386.8161	1363.9608	1363.9608	1363.6287

Momentler yöntemiyle plakanın bulunan ilk üç değeri hesabının sonucunda yapılan bağıl hatalar sırasıyla ω_1 ve ω_2 için $7.4\text{x}10^{-6}$ iken ω_3 için $6.40\text{x}10^{-6}$ olmaktadır.

IV. TARTIŞMA

Plaka çökmesinin polinom olarak önerilmesi momentler yönteminde karşılaşılacak integrallerin kolay alınmasını sağlamıştır. Yöntem uygulanırken x değişkenin kuvvet artışıyla beraber daha uygun özdeğer sonuçları bulunmuştur. Deneme veya test fonksiyonu olarak mutlaka polinom seçilmesi şartı yoktur.

Problem sınır şartlarını sağlayan ve integrali kolay alınan herhangi bir fonksiyon momentler yönteminde kullanılabilir.

V. SONUÇLAR

Hem analitik hem de momentler yöntemiyle hesaplanan öz değerler birbirleriyle uyumludur. Çalışmada tanıtılan yöntem incelenen problemin çözümünü lineer bir denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Momentler yöntemi plaka serbest titreşimi problemine başarı ile uygulanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] E.H. Dowell, "Flutter of infinitely long plates and shells part I: plate", *AIAA Journal*, vol 4 (8), pp 1370-1377, 1966

[2] R.J. Epstein, "Flutter of an infinitely long panel in a duct", *AIAA Journal*, vol 33 (1), pp 109-115, 1995

[3] E. Uzal and B. Körbahti, "Vibration control of an elastic strip by a singular force", *Indian academy of sciences, Sadhana*, vol 35 (2), pp 233-240, 2010