SINIR DEĞER VE BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN KOLLOKASYON ÇÖZÜMLERİ

Dr. Birkan DURAK
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

ÖZET

Doğadaki herhangi fiziksel bir durum diferansiyel denklemler sayesinde matematiksel olarak modellenebilir. Bu tanımlanan modelin çözümü incelenen olayın sonraki davranışı hakkında daha fazla bilgi elde edilmesini sağlar. Diferansiyel denklem teorisi çeşitli bilim insanlarının katkılarıyla oldukça fazla çözüm tekniğine sahiptir. Ancak bazı problemlerde analitik çözümü bulmak ya çok zordur ya da fazla zaman almaktadır. Bu yüzden çoğu araştırmacı problemlerinin sayısal çözümlerini tercih eder.

Bu çalışma kollokasyon yönteminin bazı sınır değer ve başlangıç değer problemlerine uygulanabilirliğini göstererek sayısal çözüm araçlarına katkı sunmayı hedeflemiştir. Çalışmada kollokasyon yönteminin matematiksel arka planı hakkında bilgi verilerek, doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerin çözümlerinin nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir.

Yöntemde kullanılan deneme fonksiyonlarının sadece problemin şartlarını sağlaması gerekmektedir. Yaklaşık çözümün katsayılarını veren denklemler problemin şartlarından ve bu çözümün diferansiyel denkleme yazılmasıyla meydana gelen kalanın keyfi noktalardaki değerlerinin sıfıra eşitlenmesiyle oluşan denklemlerdir.

Diferansiyel denklemi bir denklem sistemine indirgeyerek çözmek kollokasyon yönteminin önemli bir avantajıdır. Bazı yarı analitik çözümlerde olduğu gibi dönüşüm uygulama zorunluluğu yoktur.

Çeşitli yayınlardan alınan örneklerin kollokasyon çözümleri göstermektedir ki bu yöntemle basit işlemlerle ve belirli hata payında çözümler elde etmek mümkündür. Deneme fonksiyonun polinom seçilmesi durumunda, yaklaşık çözümdeki mutlak hata değerini azaltmak için polinomun derecesi arttırılmalıdır. Doğrusal denklemlerde yaklaşık çözümün katsayıları tek ve reel sayı olmasına rağmen doğrusal olmayan denklemlerde aynı katsayılar birden fazla gerçek veya sanal sayı değeri almaktadır.

Kollokasyon yöntemi, ilerleyen çalışmalarda yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılabilir. Bu yöntem ve simgesel hesap yazılımları integral veya integrodiferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin daha basit işlem adımlarıyla bulunabilmesini sağlayacaktır.

Anahtar Kelimeler: Başlangıç ve Sınır Değer, Kollokasyon Yöntemi, Sayısal Çözüm

COLLOCATION SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE AND INITIAL VALUE PROBLEMS

ABSTRACT

Any physical state in nature can be modeled mathematically via differential equations. Solving this defined model provides more information about the subsequent behavior of the investigated event. Differential equation theory has quite a lot of solution techniques with the contributions of various scientists. However, finding analytical solutions for some problems is either very difficult or takes too much time. That's why many researchers prefer the numerical solution of their problems.

This study aims to contribute to numerical solution tools by showing the applicability of the collocation method to some boundary value and initial value problems. In the study, by giving information about the mathematical background of the collocation method, it is shown how the solutions of linear and nonlinear equations can be obtained.

Trial functions used in the method only need to satisfy the conditions of the problem. The equations that give the coefficients of the approximate solution are the equations formed by the conditions of the problem and by writing this solution into the differential equation, the values of the residual at arbitrary points equal to zero.

By reducing the differential equation to solve a system of equations is a significant advantage of the collocation method. There is no obligation to apply transformation, as in some semi-analytical solutions.

Collocation solutions of problems taken from various publications show that; with this method, it is possible to obtain solutions with simple steps and a certain ratio of error. If the trial function is chosen as a polynomial, the degree of it should be increased to reduce the absolute error value in the approximate solution. Although the coefficients of the approximate solution in linear equations are odd and real numbers, in nonlinear equations the same coefficients take more than one real or imaginary value.

The collocation method can be used to find approximate solutions of high order differential equations in further studies. This method and symbolic calculation softwares will enable numerical solutions of integral or integrodifferential equations to be found with basic steps.

Keywords: Initial and Boundary Value, Collocation Method, Numerical Solution

GİRİŞ

Fizik ve mühendislikte karşılaşılan birçok olay matematiksel olarak modellenirken bir değişken ve bu değişkenin türevlerini içeren denklemlerden yararlanılır. Bu denklemler bilindiği gibi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Başta biyoloji olmak üzere tıp ve sosyal bilimlerdeki çoğu olayı anlamak için oluşturulan diferansiyel denklemleri çözmek gerekir (Pala, 2006). Bir diferansiyel denklemin çözümünde meydana gelecek olan integral sabitleri $x = a$ ve $x = b$ gibi iki noktada verilen şartlarla belirlenebiliyorsa bu probleme sınır değer problemi adı verilir. Diferansiyel denklemin nonlineer olması, analitik çözümün zor veya imkansız olması durumlarında bağımsız değişkenlerin sadece belirli değerleri için

çözümün hesaplaması esasına dayanan sayısal çözüm yöntemlerinden biri kullanılabilir (Karagöz, 2011). Adi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinde kullanılan yöntemlerden en önemlileri atış yöntemi, sonlu farklar yöntemi, varyasyon (değişim) yöntemi, belirsiz parametreler yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi şeklinde gruplandırılabilir (Bakioğlu, 2006). Diferansiyel denklemlerin analitik çözümü belirli tekniklerle bulunanlar dışında kalanları için farklı sayısal çözümler geliştirilmiştir. Sınırların değişmesi durumunda aynı problem yeniden çözülmek zorundadır. Bazı problemlerde ise seçilen sınırlara bağlı olarak çözümün var olmayabileceği unutulmamalıdır. Diferansiyel denklemlerin çeşitliliği yüzünden bulunmaya çalışılan yaklaşık çözüm için uygulanan yöntemlerde oldukça farklılık göstermektedir.

MATERYAL VE METOT

L bir diferansiyel operatör olmak üzere bir diferansiyel denklem

$$Ly(x)=f(x) \tag{1}$$

olarak gösterebilir. Bu denklemin yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x)=\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n \tag{2}$$

olsun. Yaklaşık çözümdeki $\varphi_n(x)$ ifadesi problemin sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

Bu yaklaşık çözüm diferansiyel denkleme yazılırsa $R(x)$ olarak adlandırılan bir kalan olacaktır.

$$R(x)=L[\tilde{y}(x)]-f(x) \tag{3}$$

(3) denklemi bir ağırlık fonksiyonu olan W_i ile çarpılarak a dan b ye integre edilir ve sıfıra eşitlenerek yaklaşık çözümün aranan katsayılar olan C_n 'ler bulunabilir.

$$F_i(C_1,C_2,.....,C_n)=\int_a^b W_i(x)R(x)dx=0 \qquad (i=1,2,.....,N) \tag{4}$$

(4) denklemindeki ağırlık fonksiyonu Dirac delta fonksiyonu olarak alınırsa katsayıları verecek olan denklem sisteminin kapalı formu

$$F_i(C_1,C_2,.....,C_n)=\int_a^b \delta(x-x_i)R(x)dx=0 \qquad (i=1,2,.....,N) \tag{5}$$

haline gelecektir. Dirac delta fonksiyonunun integral işareti altında özelliği gereği

$$F_i(C_1,C_2,.....,C_n)=R(x_i)=0 \qquad (i=1,2,.....,N) \tag{6}$$

(6) ile verilen denklem sistemi meydana gelir. Burada x_i değerleri kollokasyon noktları olarak adlandırılırlar. İncelenen problemin sınırları arasında kalmak üzere keyfi olarak seçilebilirler. (6) ile verilen denklem sisteminden bulunan C_n katsayıları (2) de yerine yazılarak diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü kollokasyon yöntemiyle bulunmuş olur.

Yöntem sınır şartları ile verilen denkleme uygulanmak istensin (Pirabaharan, vd., 2016)

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+y(x)=0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned} \tag{8}$$

verilen problemin gerçek çözümü $J_0(x)$ sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonu olmak üzere

$$y_{gerçek}=\frac{J_0(x)}{J_0(1)} \tag{9}$$

şeklindedir. Yaklaşık çözüm

$$y(x)=\sum_{n=0}^{3} C_n x^n \tag{10}$$

olsun. (10) denklemine (8) verilen sınır şartları uygulanırsa

$$\begin{aligned} y'(0)=0 \quad &\Rightarrow \quad C_1=0 \\ y(1)=1 \quad &\Rightarrow \quad C_0=1-C_2-C_3 \end{aligned} \tag{11}$$

(11) denklemindeki katsayılar denklem (10) yazılarak (7) ile verilen diferansiyel denklemde yerine konulursa kalan

$$R(x)=1+C_2+x^2C_2-C_3+6xC_3+x^3C_3+\frac{2xC_2+3x^2C_3}{x} \tag{12}$$

Kollokasyon için $x_1 = \frac{1}{3}$ ve $x_2 = \frac{2}{3}$ alınarak

$$R\left(\frac{1}{3}\right) = 0.3214285714285714 + C_2 + 0.6547619047619048C_3 = 0$$
$$R\left(\frac{2}{3}\right) = 0.29032258064516125 + C_2 + 1.5376344086021503C_3 = 0 \quad (13)$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerin çözümüyle katsayılar $C_2 = -0.344497$ ve $C_3 = 0.035232$ şeklinde bulunur. Bu değerler (11) ve (10) denklemleri kullanılarak (7) ile verilen diferansiyel denkleminyaklaşık çözüm

$$y = 1.30926 - 0.344497x^2 + 0.035232x^3 \quad (14)$$

olacaktır. Kollokasyon yöntemi bazı sınır değer problemlerinin gerçek çözümünü doğrudan verir. Bunun için verilen diferansiyel denklem incelenirse (Ertürk, 2006)

$$-y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + (1-x^2)y = x^4 - 2x^2 + 7 \quad , \quad 0 < x < 1$$
$$y'(0) = 0 \qquad y(1) = 0 \quad (15)$$

yaklaşık çözüm olarak

$$y = \sum_{n=0}^{2} C_n x^n \quad (16)$$

kabul edilsin. Kollokasyon noktası olarak $x_1 = 0.5$ alınırsa yaklaşık çözüm

$$y_{yaklaşık} = 1 - x^2$$
(17)

olarak bulunur ve bu çözüm (15) ile verilen denklemin gerçek çözümüdür. Yöntemin başlangıç değer problemlerine uygulanması için aşağıdaki problem göz önüne alınsın (Hermann ve Saravi, 2016)

$$y''(x) + y^2 = 0$$
$$y(0) = 1$$
(18)

Problemin gerçek çözümü $y(x) = \frac{1}{(1+x)}$ dir. bu problemin yaklaşık çözümü

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{2} C_n x^n \tag{19}$$

kalan denkleminde x yerine $x_1 = 1/3$ ve $x_2 = 2/3$ değerleri konularak oluşturulan iki denklemden oluşan sistemin çözümünden gelen katsayılar

$$\begin{aligned} C_1 &= 27.375967 & C_2 &= -59.540758 \\ C_1 &= -15.533943 - 1.946579\text{i} & C_2 &= 18.355784 - 4.32752\text{i} \\ C_1 &= -15.533943 + 1.946579\text{i} & C_2 &= 18.355784 + 4.32752\text{i} \\ C_1 &= -0.808081 & C_2 &= 0.3291901 \end{aligned} \tag{20}$$

olmaktadır. Bu katsayılardan en küçük mutlak değere sahip reel olanlarının alınmaması halinde yaklaşık çözümdeki noktasal mutlak hata çok fazla olmaktadır. Bu yüzden yaklaşık çözüm en son katsayılar alınarak

$$y_{yaklaşık} = 1 - 0.8080810213677663x + 0.3291901554823234x^2 \tag{21}$$

şeklinde bulunur. Bu problemde yaklaşık çözüm bulunurken problemin bağımsız değişkenin $0 < x < 1$ olduğu kabul edilmiştir. Kollokasyon yöntemi yüksek mertebeden başlangıç değer problemlerin çözümünde de kullanılabilir. Bunun için verilen denklem incelensin (Hosseini, vd., 2015)

$$\begin{aligned} & y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + y^5 \\ & y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

gerçek çözüm

$$y_{gerçek} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}} \tag{23}$$

olmaktadır. $0 < x < 1$ olmak üzere bu başlangıç değer problemin yaklaşık çözüm

$$y_{yaklaşık} = 1 + \sum_{n=2}^{3} C_n x^n \tag{24}$$

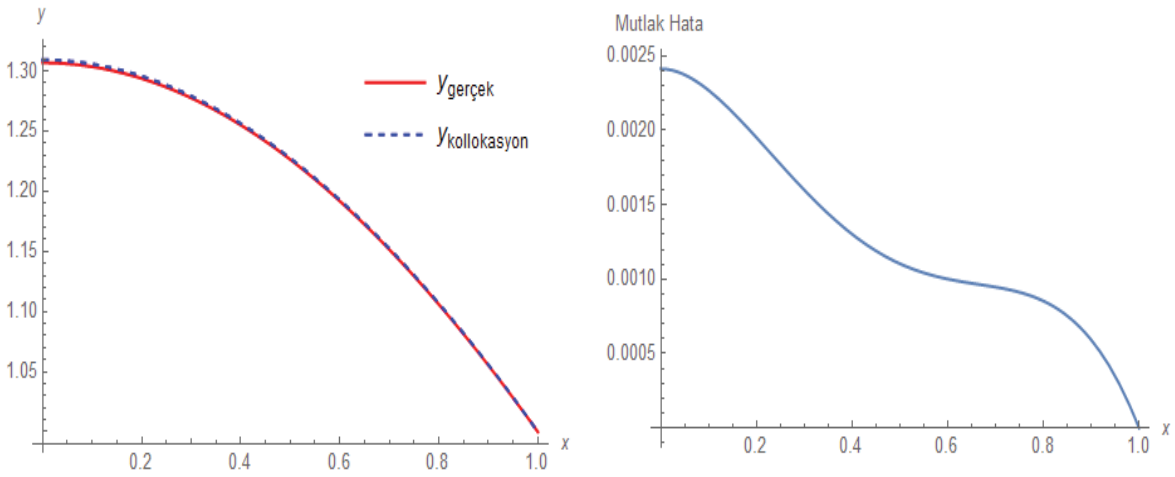
şeklinde kabul edilsin. Bu çözüm diferansiyel denkleme yazılarak kalan bulunur. Oluşturulan denklem sisteminin çözümünden gelen mutlak değerce en küçük katsayılar olan $C_2 = -0.18566652824011068$ ve $C_3 = 0.051061331058107486$ olarak alınırsa yaklaşık çözüm

$$y_{yaklaşık}(x) = 1 - 0.18566652824011068x^2 + 0.05106133105810748 6x^3 \quad (25)$$

(25) ile verilen bu yaklaşık çözüm için kalanda x yerine sırasıyla $x_1 = 1/3$ ve $x_2 = 2/3$ kollokasyon nokta değerleri konulmuştur.

BULGULAR

Şekil 1 de denklem (7) ve (8) ile verilen diferansiyel denklemin gerçek ve iki kollokasyon noktası için yaklaşık çözümü grafik halinde verilmiştir.



Şekil 1. Değişken katsayılı birinci sınır değer probleminin Analitik çözümü ve Kollokasyon yaklaşık çözümü.

Tablo 1 de incelenen birinci problemin iki kollakasyon noktası alınması durumunda bulunan yaklaşık çözümün çeşitli x ler için değerleri görülmektedir.

Tablo 1. Değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemin çözümlerinin karşılaştırılması

x değeri	**Analitik Çözüm**	**Yaklaşık Çözüm** [	**Mutlak Hata**
0.0	1.306851833933565	1.309260000000000	0.00240816606643501

0.1	1.303586745737600	1.305850252700000	0.00226350696239952
0.2	1.293815950611317	1.295761941600000	0.00194599098868276
0.3	1.277612653190160	1.279206462900000	0.00159380970984024
0.4	1.255098183816594	1.256395212800000	0.00129702898340578
0.5	1.226440988683936	1.227539587500000	0.00109859881606433
0.6	1.191855228417661	1.192850983200000	0.000995754782339375
0.7	1.151598997340475	1.152540796100000	0.000941798759525270
0.8	1.105972178976747	1.106820422400000	0.000848243423253070
0.9	1.055313956521446	1.055901258300000	0.000587301778554261
1.0	1.000000000000000	0.999994700000000	5.29999999987485e-06

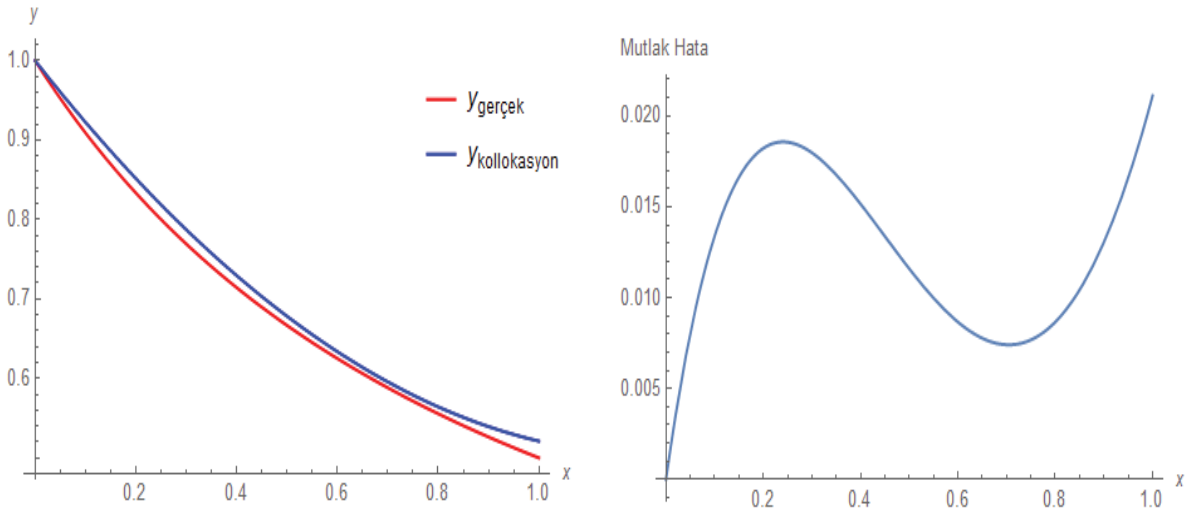
Kollokasyon yönteminde yaklaşık çözüm için alınan polinomun derecesi arttırılırsa kullanılması gereken kollokasyon nokta sayısı artacaktır. Tablo 2 de en büyük mutlak hata farklı kollokasyon noktaları için verilmiştir.

Tablo 2. Farklı kollokasyon nokta sayıları için yaklaşık çözümdeki en büyük mutlak hata

Kollokasyon Nokta Sayısı	**Mutlak Hata**
2	2.40E-03
3	2.00E-05
4	9.22E-06
5	7.04E-08
6	2.02E-08
7	1.50E-10

8	2.85E-11
9	1.97E-13
10	2.81E-14

Şekil 2 de denklem (18) ile verilen ve yaklaşık çözümü bulunan nonlineer başlangıç değer probleminin gerçek, iki kollokasyon noktası alınması durumundaki yaklaşık çözüm ve nokta bazında yapılan mutlak hataları grafik halinde gösterilmiştir.



(a) (b)

Şekil 2. Değişken katsayılı birinci başlangıç değer probleminin (a) Analitik çözümü ve iki kollokasyon noktası için yaklaşık çözümü (b) nokta bazında yapılan mutlak hata.

Yaklaşık çözümdeki terim sayısı arttırılarak yani daha fazla kollokasyon noktası kullanarak mutlak hatayı azaltmak mümkündür. Tablo 3. de N kollokasyon nokta sayısını göstermek üzere N=2 ve N=3 durumunda bulunan yaklaşık çözümlerin değerleri ve noktasal mutlak hata değerleri verilmiştir.

Tablo 3. Birinci başlangıç değer probleminde farklı kollokasyon nokta sayıları için yaklaşık çözümler ve noktasal mutlak hatalar

x değeri	**Analitik Çözüm**	**N=2**	**N=3**	**N=2 için Mutlak Hata**	**N=3 için Mutlak Hata**
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000

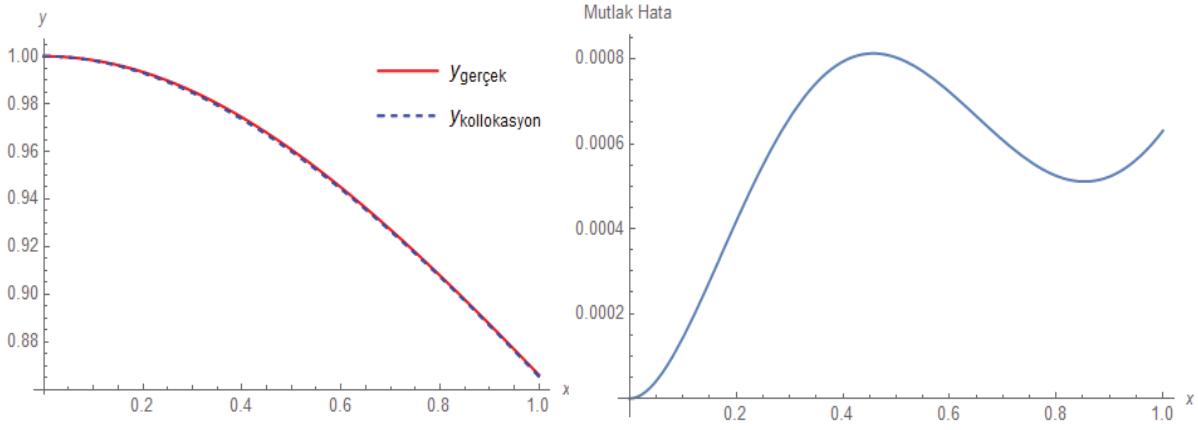
0.1	0.909090	0.922483	0.913417	0.013392	0.004326
0.2	0.833333	0.851551	0.838362	0.018218	0.005029
0.3	0.769230	0.787202	0.773546	0.017972	0.004315
0.4	0.714285	0.729438	0.717675	0.015152	0.003389
0.5	0.666666	0.678257	0.669460	0.011590	0.002793
0.6	0.625000	0.633659	0.627609	0.008659	0.002609
0.7	0.588235	0.595646	0.590832	0.007411	0.002597
0.8	0.555555	0.564216	0.557838	0.008661	0.002282
0.9	0.526315	0.539371	0.527334	0.013055	0.001019
1.0	0.500000	0.521109	0.498032	0.021108	0.001967

Bu problem için Tablo 4. farklı kollokasyon sayıları için en büyük mutlak değerleri verilmiştir.

Tablo 4. Farklı kollokasyon nokta sayıları için yaklaşık çözümdeki en büyük mutlak hata

Kollokasyon Nokta Sayısı	**Mutlak Hata**
2	2.1E-02
3	5.0E-03
4	1.3E-03
5	3.6E-04
6	9.8E-05
7	2.6E-05
8	6.8E-06
9	1.7E-06

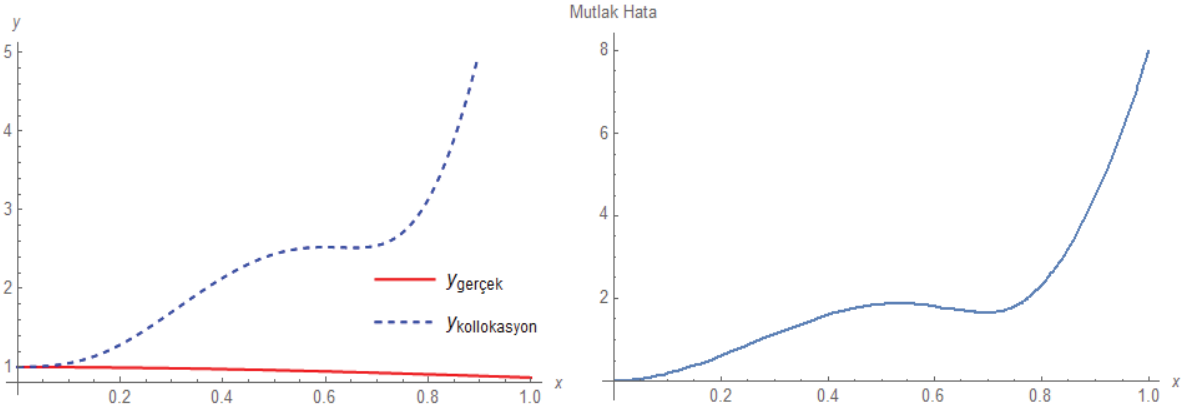
Şekil 3 de ikinci başlangıç değer problemi $C_2 = -0.1856$ ve $C_3 = 0.0510$ katsayıları için yaklaşık çözümü ve nokta bazında yapılan mutlak hatalar grafik olarak gösterilmiştir.



(a) (b)

Şekil 3. İkinci başlangıç değer probleminin (a) Analitik çözümü ve iki kollokasyon noktası için yaklaşık çözümü (b) nokta bazında yapılan mutlak hata.

Bu problem nonlineer olduğundan katsayıları birden fazla reel veya karmaşık değer alabilmektedir. Eğer katsayılar en küçük reel sayı seçilmeyerek $C_2 = 3.5432 - 20.551i$ ve $C_3 = -0.6887 + 27.948i$ olarak alınsaydı kollokasyon çözümü, gerçek çözümden uzaklaşacaktı. Şekil 4 de bu durum gösterilmiştir.



(a) (b)

Şekil 4. İkinci başlangıç değer probleminin katsayılarının karmaşık sayı alınması halinde (a) Analitik çözümü ve iki kollokasyon noktası için yaklaşık çözümün mutlak değeri (b) nokta bazında yapılan mutlak hata.

SONUÇ VE TARTIŞMA

Kollokasyon yöntemi bir diferansiyel denklemi cebrik denklem sistemine indirgeyerek çözmeye imkan verir. Değişken katsayılı Lineer diferansiyel denklemler için seri çözümünden daha basit işlem adımları olan yaklaşık çözümler kolayca bulunabilir.

Bu çalışmada Lineer ve Nonlineer diferansiyel denklemlere uygulanarak yaklaşık çözümler bulunmuştur. Bazı problemlerde ise gerçek çözümler bu yöntemle bulunabilmektedir. Deneme fonksiyonlarının polinom olduğu örnekler verilmesine rağmen başka problemlerde test fonksiyonu olarak başka çeşit fonksiyonlar da kullanılabilir. Test fonksiyonu sayısı arttırıldıkça mutlak hata azalmaktadır. Kollokasyon noktaları arasındaki uzaklıklar eşit alınmayarak farklı çözümler elde edilebilir.

Mevcut çalışmada incelenen örnekler göz önüne alındığında, nonlineer denklemlerde yaklaşık çözüm katsayılarının değerlerinin birden fazla gerçek veya karmaşık sayı olduğu bulunmuştur. Katsayıların bu değerler arasından en küçük reel olanları yaklaşık çözüm için uygun katsayılar olmaktadır.

Kollokasyon yöntemi ileriki çalışmalarda Nonlineer diferansiyel bir denklemin başka bir sayısal yöntemle çözümüne yardımcı olabilecek ön verilerin üretilmesinde bu yöntem kullanılabilir.

KAYNAKÇA

Bakioğlu, M. (2011). Sayısal Analiz (2.Baskı). İstanbul: Birsen Yayınevi

Ertürk, V. S. (2006). Differential transform method for solving a class of sıngular two-point boundary value problems . *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 1*(1), 70-76. https://dergipark.org.tr/tr/pub/sdufeffd/issue/11264/134600

Hosseini, S.Gh. and Abbasbandy, S. (2015). Solution of lane-emden type equations by combination of the spectral method and adomian decomposition method. *Mathematical Problems in Engineering, Volume 2015,* Article ID 534754 https://doi.org/10.1155/2015/534754

Hermann, M. and Saravi, H. (2016). Nonlinear ordinary differential equations *: Analytical Approximation and Numerical Methods* (1 st). Springer India.

Karagöz, İ. (2011). Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları (3.Baskı). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık

Pala, Y. (2006). *Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler* (1.Baskı). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım

Pirabaharan, P. and Chandrakumar, R. D. (2016). A computational method for solving a class of singular boundary value problems arising in science and engineering. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences, 3* (4), 383-391. https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2016.09.004.