Lineer İntegro Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Galerkin Yöntemi

Öğr.Gör. Dr. Birkan DURAK[1]
Dr. Öğr. Üyesi Hasan Ömür ÖZER[2]

[1] İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, Uçak Teknolojisi Programı, birkand@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0002-8196-5407
[2] İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, İklimlendirme ve Soğutma Teknolojisi Programı, hasanomur.ozer@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0002-6388-4638
*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Birkan DURAK , birkand@iuc.edu.tr

ÖZET

Doğa olaylarını ve teknolojideki bazı problemleri tanımlayan denklemler, integral ve türev içeren terimlere sahiptir. Bu tarz denklemler literatürde integro diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Bu tarz denklemlere elastisite, biyomekanik, elektromanyetik, ısı transferi vb. konulardaki çalışmalarda kurulan matematiksel modellerde rastlanır. Her ne kadar bu denklemlerin çözümlerinin kararlılığı ve niteliksel davranışı üzerine bir çok çalışma mevcut olsa da analitik çözüm elde edilmesindeki sınırlamalar veya güçlükler sayısal yöntemlere olan ihtiyacı arttırmaktadır. Bu bağlamda Runge-Kutta, varyasyonel iterasyon vb. yöntemler çözüm bulunmada kullanılmaktadır.

Galerkin yönteminde ilk adımda incelenen probleme bir yaklaşık çözüm önerilir. Bu çözüm denkleme yazılarak kalan elde edilir. Bu kalanın yaklaşık çözümün katsayılarına göre olan türevlerden yararlanılarak elde edilen ve ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonlarla çarpılarak sınırlarda integrasyonu, yöntemin ikinci adımıdır. Son olarak kurulan denklem sisteminin çözümü ile yaklaşık çözüm katsayıları bulunarak problemin çözümü bitirilir. Bu yöntemde her ne kadar integrasyon işlemi var olsa bile çözüm için polinom önerilmesi kolaylıkla hesaplama yapılmasını sağlamaktadır.

Çalışmada öncelikle ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden Galerkin tanıtılmıştır. Göz önüne alınarak problemler incelendiğinde yöntemin uygun çözüm bulmada ve nokta bazında en küçük mutlak hataları elde etmede etkili olduğu gösterilebilmiştir. Ayrıca yaklaşık çözümde basit polinomlar kullanmak yöntemin önemli avantajlarındandır. Bu polinomlardaki derece artışıyla beraber nokta bazındaki mutlak hataları daha da küçültebilmek mümkün olmuştur. Yöntem ilerleyen çalışmalarda kesir türevli, integral veya çeşitli türdeki denklemlere yaklaşık çözüm bulmak için kullanılabilir.

Anahtar Kelimeler – Galerkin Yöntemi, Sayısal Çözüm, Ağırlıklı kalanlar, Yaklaşık çözüm, Lineer Diferansiyel Denklemler

GİRİŞ

Mühendislikte ve temel bilimlerde bazı problemleri tanımlayan denklemler, integral ve türev içeren terimlere sahiptirler. Matematikte bağımsız değişkenin hem türevini hem de integralini içeren bu tarz denklemlere integro diferansiyel denklem adı verilir. İntegral ve integro diferansiyel denklemlerle elastisite, biyomekanik, hastalık yayılımı, elektromanyetik, ısı transferi vd. konulardaki çalışmalarda kurulan matematiksel modellerde karşılaşılır (Çimen ve Enterili, 2020). 1960'lı yıllardan günümüze kadar geçen sürede integro diferansiyel denklemlerin

çözümlerinin kararlılığı ve niteliksel davranışı denklemin tekil olup olmama durumuna göre farklı araştırmacılarca incelenmiştir (Kareem, 2019).

He ne kadar konuyla ilgili bu çalışmalar önemli bir literatür meydana getirmiş olsa da analitik çözümlerin sınırlı olması bu tarz denklemlerin çözümünde kullanılan sayısal yöntemlere olan ihtiyacı arttırmıştır. İntegrasyon sınırlarının sabit sayı olduğu denklemler Fredholm tipindeyken, en az bir tane sınırın değişken olduğu denklemler Volterra integro diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Araştırmacılarca bu tarz denklemlere sayısal çözümler bulmak için Diferansiyel transform, Varyasyonel iterasyon, geliştirilmiş Runge-kutta vb. yöntemler uygulanmıştır.

Çalışmada öncelikle kullanılan Galerkin yöntemi tanıtılacaktır. Ardından literatürden seçilen örnek problemlere yöntem uygulanarak elde edilen yaklaşık çözümler kesin çözümle karşılaştırılacaktır.

1- Galerkin Yöntemi

Lineer bir integro diferansiyel denklem m en yüksek mertebeden türevi göstermek üzere

$$y^m(x) = y(x) + \int_a^b y(t)dt \quad , \tag{1}$$

şeklinde basitçe gösterilebilir. (1) denklemin yaklaşık çözümü

$$\bar{y}(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n x^n \tag{2}$$

olsun. Burada N yaklaşık çözümdeki polinomun derecesini göstermektedir. (2) ile denklemi (1) de yerine yazılırsa kalan

$$R(x) = \frac{d^m}{dx}\left(\sum_{n=1}^{N} C_n x^n\right) - \sum_{n=1}^{N} C_n x^n + \sum_{n=1}^{N}\left(\int_a^b C_n t^n dt\right) \tag{3}$$

olacaktır. Galerkin yönteminde $R(x)$ yani kalan

$$W_n = \frac{\partial \bar{y}(x)}{\partial C_n} \quad , \quad n = 1,2,3,...,N \tag{4}$$

ile tanımlanan ağırlık fonksiyonlarıyla çarpılır, ardından problemin sınırlarında integre edilerek sıfıra eşitlenir. Böylece her bir ağırlık fonksiyonu ile çarpma işlemi bir denklem verecektir. Bu denklemlerin oluşturacağı denklem sistemi kapalı formu $x_0 < x < x_1$ problemin sınırlarını göstermek üzere

$$\int_{x_0}^{x_1} R(x)W_n(x)dx = 0 \tag{5}$$

şeklinde olmaktadır. (5) numaralı denklem sisteminin çözümüyle denklem (2) de verilen yaklaşık çözümdeki katsayılar hesaplanarak yerine yazılır. Böylece çözüm tamamlanmış olur.

2- Galerkin Yönteminin İntegro Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Galerkin yöntemi farklı türdeki integro diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünü bulmakta kullanılabilir. Birinci problem olarak Homotopy analiz yöntemiyle çözülen aşağıda verilen Fredholm integro diferansiyel denklemini inceleyelim (Jaradat vd., 2008).

$$y'(x) = y(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{x+1} - In(1+x) + \frac{1}{(In2)^2}\int_0^1 \frac{x}{1+t}\, y(t)\, dt \tag{6}$$
$$y(0) = 0$$

Bu denklemin çözümü $In(x+1)$ dir. Bu probleme sınır şartına da dikkat ederek

$$y(x) = \sum_{n=1}^{10} C_n x^n \tag{7}$$

şeklinde bir polinomu yaklaşık çözüm olarak önerelim. Bu çözüm (6) ile verilen denkleme yazılırsa kalan

$$R(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{1+x} + \text{Log}[1+x] + C_1 - xC_1 + 2xC_2 - x^2C_2 + 3x^2C_3 - x^3C_3 + 4x^3C_4 - x^4C_4 + 5x^4C_5 - x^5C_5 + 6x^5C_6 - x^6C_6 + 7x^6C_7 - x^7C_7 + 8x^7C_8 - x^8C_8 + 9x^8C_9 - x^9C_9 + 10x^9C_{10} - x^{10}C_{10} - \frac{1}{\text{Log}[2]^2}x(-(-1+\text{Log}[2])C_1 + (-\frac{1}{2} + \text{Log}[2])C_2 + \frac{5C_3}{6} - \text{Log}[2]C_3 - \frac{7C_4}{12} + \text{Log}[2]C_4 + \frac{47C_5}{60} - \text{Log}[2]C_5 - \frac{37C_6}{60} + \text{Log}[2]C_6 + \frac{319C_7}{420} - \text{Log}[2]C_7 - \frac{533C_8}{840} + \text{Log}[2]C_8 + \frac{1879C_9}{2520} - \text{Log}[2]C_9 - \frac{1627C_{10}}{2520} + \text{Log}[2]C_{10}) \tag{8}$$

şeklinde bulunur. Galerkin yönteminde kullanılacak ağırlık fonksiyonları ise

$$W_n = \frac{\partial y(x)}{\partial C_n} \quad , \quad n = 1,2,3,...,10 \tag{9}$$

olmaktadır. Denklem (7) deki katsayıları verecek olan denklem sisteminin her bir elemanı

$$\int_0^1 R(x).W_n(x)\,dx \tag{10}$$

ifadesiyle bulunur. Bulunan bu sistemin çözümüyle katsayılar

$C_1 = 0.999, C_2 = -0.4999, \quad C_3 = 0.3330, \; C_4 = -0.2482\,, C_5 = 0.1918$
$C_6 = -0.1417, C_7 = 0.0900, C_8 = -0.0432, C_9 = 0.0133, C_{10} = -0.0019$
şeklinde hesaplanır. Bunlar (7) denklemine yazılırsa verilen problemin aranan yaklaşık çözümü

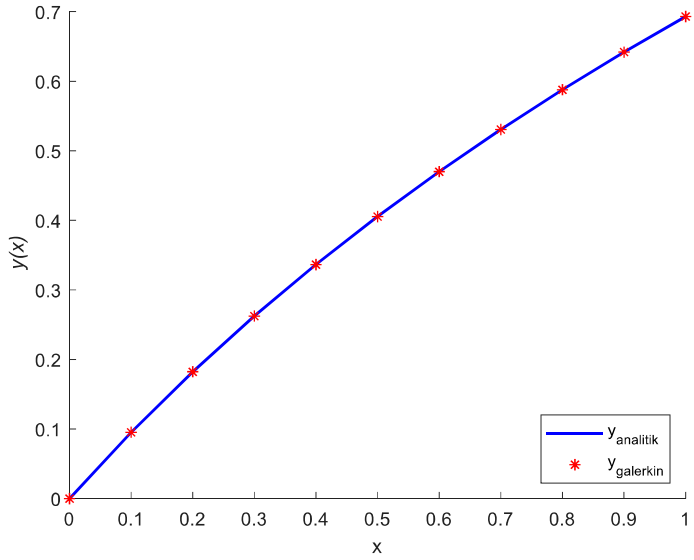
$$y(x) = -0.0019x^{10} + 0.0133x^9 - 0.0432x^8 + 0.090x^7 - 0.1417x^6 + 0.1918x^5 - 0.2482x^4 + 0.3330x^3 - 0.4999x^2 + 0.9999x \tag{11}$$

olarak bulunacaktır. Tablo 1 Galerkin yöntemindeki mutlak hata ve Homotopi analiz metodu ile bulunan mutlak hataları göstermektedir.

Tablo 1: Galerkin ve Homotopi analiz yöntemlerinin karşılaştırılması

	Homotopy Analysis Method			Galerkin
x	$\lvert Ey_{HAM}^{10}\rvert$	$\lvert Ey_{HAM}^{15}\rvert$	$\lvert Ey_{HAM}^{20}\rvert$	
0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.2	$1.37\text{x}10^{-5}$	$1.59\text{x}10^{-7}$	$1.09\text{x}10^{-8}$	$6.95\text{x}10^{-9}$
0.4	$6.59\text{x}10^{-5}$	$7.64\text{x}10^{-7}$	$5.26\text{x}10^{-8}$	$8.39\text{x}10^{-9}$
0.6	$1.80\text{x}10^{-4}$	$2.09\text{x}10^{-6}$	$1.44\text{x}10^{-7}$	$1.12\text{x}10^{-8}$
0.8	$3.98\text{x}10^{-4}$	$4.61\text{x}10^{-6}$	$3.17\text{x}10^{-7}$	$1.66\text{x}10^{-8}$
1.0	$7.81\text{x}10^{-4}$	$9.05\text{x}10^{-6}$	$6.24\text{x}10^{-7}$	$2.32\text{x}10^{-8}$

Şekil 1 de ise Galerkin yöntemiyle bulunan yaklaşık çözüm ile problemin kesin çözümü karşılaştırılmıştır.



Şekil 1: Galerkin çözümü ile analitik çözümün karşılaştırılması

İkinci problem çözümü $y(x) = x + e^x$ olan örnek olsun (Xu, 2007)

$$y''(x) = e^x - \frac{4}{3}x + \int_0^1 xty(t)\,dt \qquad (12)$$
$$y(0) = 1\,,\; y'(0) = 2$$

Bu problemin yaklaşık çözümü beşinci dereceden bir polinom yani

$$y(x) = \sum_{n=0}^{5} C_n x^n \qquad (13)$$

formunda kabul edilirse (12) ile verilen sınır şartları uygulandığında yaklaşık çözüm için

$$y(x) = 1 + 2x + \sum_{n=2}^{5} C_n x^n \qquad (14)$$

şeklinde bir polinomun alınması gerektiği sonucuna ulaşılır. Bu çözümdeki C_2, C_3, C_4 ve C_5 katsayılarını bulmak için ilk olarak denklem (14) teki ifade (12) ile verilen integro diferansiyel denkleme yazılarak kalan

$$R(x) = -e^x + \frac{x}{6} + 2C_2 - \frac{xC_2}{4} + \frac{29xC_3}{5} - \frac{xC_4}{6} + 12x^2C_4 - \frac{xC_5}{7} + 20x^3C_5 - \frac{xC_6}{8} + 30x^4C_6 - \frac{xC_7}{9} + 42x^5C_7 - \frac{xC_8}{10} + 56x^6C_8 - \frac{xC_9}{11} + 72x^7C_9 - \frac{xC_{10}}{12} + 90x^8C_{10} \quad (15)$$

olarak bulunmalıdır. İlk problemdekine benzer ağırlık fonksiyonları kullanılarak katsayıları verecek olan denklem sistemi kurulmalıdır. Bu problem içinde ağırlık fonksiyonları aşağıdaki gibidir

$$W_2 = x^2 \ , \ W_3 = x^3 \ , \quad W_4 = x^4, \ W_5 = x^5 \quad (16)$$

bu fonksiyonlar ve

$$\int_0^1 R(x).W_n(x)\,dx \quad (17)$$

denklemi kullanılarak denklem sistemi

$$\begin{aligned} &0.604167\ C_2+1.45\ C_3+2.35833\ C_4+3.29762\ C_5 = -0.676615 \\ &0.45\ C_2+1.16\ C_3+1.96667\ C_4+2.82857\ C_5 = -0.530103 \\ &0.358333\ C_2+0.966667\ C_3+1.68651\ C_4+2.47619\ C_5 = -0.436759 \\ &0.297619\ C_2+0.828571\ C_3+1.47619\ C_4+2.20181\ C_5 = -0.37179 \end{aligned} \quad (18)$$

şeklinde bulunur. Bu sistemin çözümü ile katsayıların

$$C_2 = 0.4974948085825821, \quad C_3 = 0.17420967767988071,$$
$$C_4 = 0.030880501099919078, \quad C_5 = 0.01534890269202281$$

olduğu görülecektir. O halde bu katsayılar (14) denklemine yazılırsa yaklaşık çözüm bulunmuş olur. 5. ve 10. dereceden polinomlar kullanılması halinde bulunacak yaklaşık çözümler sırasıyla

$$y_5 = 0.01534x^5 + 0.0308x^4 + 0.1742x^3 + 0.4974x^2 + 2x + 1$$
$$y_{10} = -0.1401x^{10} + 0.780x^9 - 1.861x^8 + 2.487x^7 - 2.035x^6 + 1.058x^5 - 0.296x^4 + 0.2312x^3 + 0.49336x^2 + 2x + 1$$

olacaktır. Tablo 2 de onuncu dereceden polinom kullanılarak bulunan yaklaşık çözümün farklı x ler için değerleri ve yapılan mutlak hatalar verilmiştir.

Tablo 2: İkinci problemde yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar

x	$y_{Analitik}$	$y_{yaklaşık}$	Mutlak Hata
0.0	1.00000	1.00000	0.000000
0.1	1.20517	1.20514	$2.68\text{x}10^{-5}$
0.2	1.42140	1.42135	$5.60\text{x}10^{-5}$
0.3	1.64986	1.64977	$8.56\text{x}10^{-5}$
0.4	1.89182	1.89171	$1.16\text{x}10^{-4}$
0.5	2.14872	2.14857	$1.47\text{x}10^{-4}$
0.6	2.42212	2.42194	$1.77\text{x}10^{-4}$
0.7	2.71375	2.71354	$2.10\text{x}10^{-4}$
0.8	3.02554	3.02530	$2.42\text{x}10^{-4}$
0.9	3.35960	3.35933	$2.75\text{x}10^{-4}$
1.0	3.71828	3.71797	$3.10\text{x}10^{-4}$

Üçüncü problem olarak bir Volterra integro diferansiyel denklemini göz önüne alalım (Rabei vd., 2019)

$$y'(x)=1-\int_0^x y(t)\,dt \quad , \quad x \geq 0 \qquad y(0)=0 \tag{19}$$

Problemin çözümü $y(x) = \sin(x)$ dir. Yaklaşık çözüm aşağıdaki formda olsun

$$y(x)=\sum_{n=1}^{10} C_n\, x^n \tag{20}$$

o halde bu problemde kalan

$$R(x) = -1. + C_1 + 0.5x^2C_1 + 2.xC_2 + 0.333x^3C_2 + 3.x^2C_3 + 0.25x^4C_3 + 4.x^3C_4 + 0.2x^5C_4 + 5.x^4C_5 + 0.1666x^6C_5 + 6.x^5C_6 + 0.1428x^7C_6 + 7.x^6C_7 + 0.125x^8C_7 + 8.x^7C_8 + 0.1111x^9C_8 + 9.x^8C_9 + 0.1x^{10}C_9 + 10.x^9C_{10} + 0.0909x^{11}C_{10} \tag{21}$$

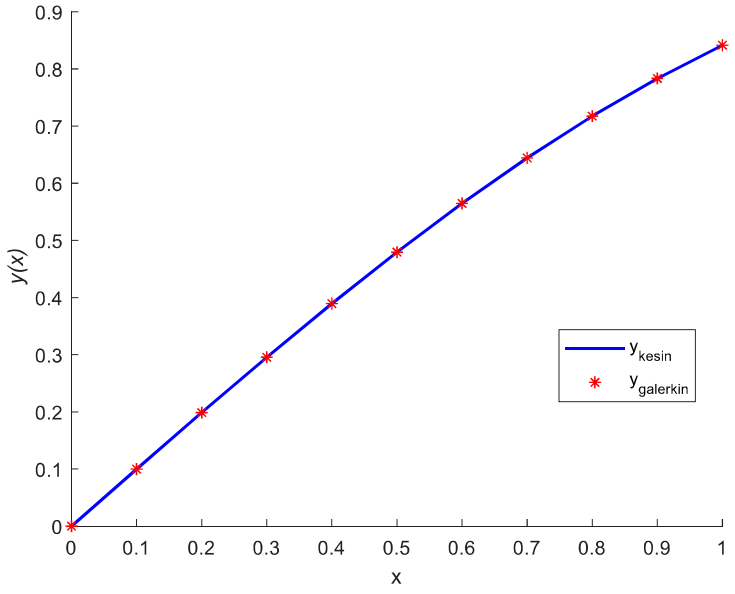
olacaktır. Denklem sistemi kurularak çözülürse katsayılar sırasıyla

$$C_1 = 1.000, C_2 = -1.74 \times 10^{-7}, C_3 = -0.166, C_4 = -0.00001$$
$$C_5 = 0.008, C_6 = -0.00006, C_7 = -0.0001, C_8 = -0.00007 \tag{22}$$
$$C_9 = 0.000033, C_{10} = -0.0000059$$

gibi bulunur. Katsayılar bulunurken yöntemde kullanılan integrasyon sınırları [0,1] aralığı olarak alınmıştır. İncelenen problem için nokta bazında yapılan mutlak hatalar Tablo 3 tedir. Şekil 2 de yaklaşık çözüm ve kesin çözüm verilmiştir.

Table 3. Üçüncü problemde yaklaşık çözüm ve yapılan mutlak hatalar

x	y_{kesin}	$y_{yaklaşık}$	Mutlak Hata
0.0	0.0000	0.0000	0.0000000
0.1	0.0983	0.0983	$1.82\text{x}10^{-11}$
0.2	0.1986	0.1986	$2.82\text{x}10^{-11}$
0.3	0.2955	0.2955	$2.51\text{x}10^{-11}$
0.4	0.3894	0.3894	$1.78\text{x}10^{-11}$
0.5	0.4794	0.4794	$2.47\text{x}10^{-11}$
0.6	0.5646	0.5646	$2.22\text{x}10^{-11}$
0.7	0.6442	0.6442	$1.54\text{x}10^{-11}$
0.8	0.7173	0.7173	$1.95\text{x}10^{-11}$
0.9	0.7833	0.7833	$1.42\text{x}10^{-11}$
1.0	0.8414	0.8414	$1.34\text{x}10^{-11}$



Şekil 2: Üçüncü problemde Galerkin çözümü ile kesin çözümün karşılaştırılması

Dördüncü ve son problem (Zarebnia, 2010)

$$y'(x)=\int_0^x x(1+2x)e^{t(x-t)}y(t)\,dt-y(x)+1+2x$$
$$y(0)=1\ ,\quad 0\le x\le 1 \tag{23}$$

olsun verilen bu örneğin kesin çözümü e^{x^2} dir. Denklem (23) da verilen şarta dikkat edilirse yaklaşık çözümün

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{10} C_n \, x^n \tag{24}$$

olarak alınması gerekir. Bu yaklaşık çözüm denklem (23) de yerine yazılarak gerekli işlemler yapılırsa kalan bulunur.

$$W_n = \frac{\partial y(x)}{\partial C_n} \quad , \quad n = 1,2,3,...,N \tag{25}$$

Ağırlık fonksiyonları kullanılarak aranan katsayıları verecek denklem sistemi ise

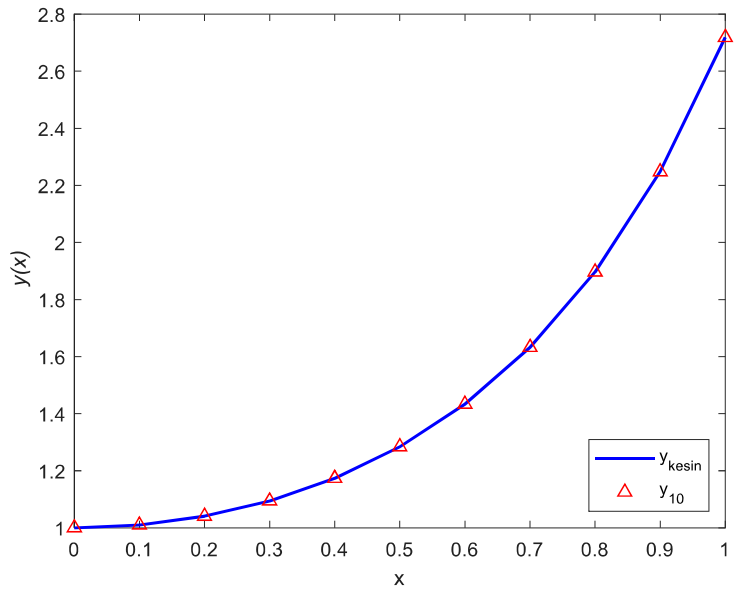
$$\int_0^1 R(x).W_n(x)\, dx \tag{26}$$

denklemi ile oluşturulur. N yaklaşık çözümdeki polinomum derecesi olmak üzere $N = 10, 15, 20$ değerleri için elde edilen yaklaşık çözümlerde nokta bazında yapılan mutlak hatalar Tablo 4 de gösterilmektedir.

Table 4. Son problemde yaklaşık çözümlerde yapılan mutlak hatalar

	Mutlak Hata		
x	$N = 10$	$N = 15$	$N = 20$
0.0	0.000000	0.0000000	0.0000000
0.1	$1.37\text{x}10^{-6}$	$5.79\text{x}10^{-11}$	$1.23\text{x}10^{-13}$
0.2	$7.28\text{x}10^{-7}$	$5.25\text{x}10^{-11}$	$1.12\text{x}10^{-13}$
0.3	$1.28\text{x}10^{-6}$	$4.80\text{x}10^{-11}$	$1.02\text{x}10^{-13}$
0.4	$1.13\text{x}10^{-6}$	$4.45\text{x}10^{-11}$	$9.48\text{x}10^{-14}$
0.5	$6.10\text{x}10^{-7}$	$4.22\text{x}10^{-11}$	$9.01\text{x}10^{-14}$
0.6	$7.88\text{x}10^{-7}$	$4.13\text{x}10^{-11}$	$8.81\text{x}10^{-14}$
0.7	$1.13\text{x}10^{-6}$	$4.22\text{x}10^{-11}$	$8.97\text{x}10^{-14}$
0.8	$9.03\text{x}10^{-7}$	$4.51\text{x}10^{-11}$	$9.52\text{x}10^{-14}$
0.9	$1.03\text{x}10^{-6}$	$5.08\text{x}10^{-11}$	$1.05\text{x}10^{-13}$
1.0	$1.27\text{x}10^{-6}$	$3.73\text{x}10^{-11}$	$7.37\text{x}10^{-14}$

$N = 10$ için olan yaklaşık ve kesin çözüm Şekil 3 ile grafik halinde verilmiştir.



Şekil 3: $N = 10$ için Galerkin çözümü ile kesin çözümün karşılaştırılması

SONUÇ

Çalışmada Galerkin yöntemi tanıtılarak literatürden seçilen çeşitli problemlere uygulanmıştır. Tablo 1 incelendiğinde yöntem ile bulunan yaklaşık çözümdeki mutlak hatalar homotopi analiz ile bulunanlardan daha az olmaktadır. İkinci problem için Galerkin yöntemiyle uygun yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Tablo 3 ve Şekil 2 ise yöntemin çözüm bulmada ve bunu nokta bazında küçük mutlak hatalar ile gerçeklemekte kullanışlı olduğunu göstermektedir. Son örnek dikkate alındığında Galerkin yönteminde kullanılan yaklaşık çözümdeki polinomun derece artışının nokta bazında mutlak hatada azalmayı sağladığı bulunmuştur.

Sonuç olarak Galerkinin integro diferansiyel denklemlere sayısal çözüm bulmak için kullanılabilecek basit ve etkili bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

REFERANSLAR

Çimen, E., ve Enterili, K. (2020). Fredholm integro diferansiyel denklemin sayısal çözümü için alternatif bir yöntem. *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 13(1), 46-53. https://doi.org/10.18185/erzifbed.633899

Kareem Z. H., (2019), İntegral ve integro-diferansiyel denklemlerde çözümlerin bazı niteliksel davranışları, Yüksek Lisans Tezi, Van: Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Jaradat, H., Alsayyed, O., Al-Shara, S. (2008). Numerical solution of linear ıntegro-differential equations, *Journal of Mathematics and Statistics*, 4(4), 250-254. https://doi.org/10.3844/jmssp.2008.250.254

Xu, L. (2007). Variational iteration method for solving integral equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 54(7-8), 1071-1078. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.12.053

Rabiei, F., Abd Hamid, F., Md Lazim, N., Ismail, F., Abdul Majid, Z., (2019) Numerical solution of volterra integro-differential equations using improved runge-kutta methods. *Applied Mechanics and Materials*, 892, 193–199. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.892.193

Zarebnia, M. (2010). Sinc numerical solution for the volterra integro-differential equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(3), 700-706. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.04.021