Nonlineer Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü İçin En Küçük Kareler Metodu

Öğr.Gör. Dr. Birkan DURAK[1]

Öğr.Gör. Dr. İbrahim Tamer EMECAN[2]

[1] İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, Uçak Teknolojisi Programı, birkand@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0002-8196-5407

[2] İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, Sualtı Teknolojisi Programı, emecan@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0002-4312-7947

ÖZET

Mühendislik ve fizikteki birçok karmaşık problem, sıklıkla lineer ya da lineer olmayan diferansiyel denklemlerle modellenir. Örneğin, optik fiberlerde ışık darbelerinin yayılımı dördüncü mertebeden doğrusal olmayan bir denklemle ifade edilirken, akışkanlar mekaniğinde yarı sonsuz bir plaka üzerindeki laminer akışın davranışı üçüncü mertebeden bir nonlineer denklemle tanımlanır. Benzer şekilde, ısı iletimi, difüzyon, finansal modelleme ve nükleer süreçlerde de nonlineer diferansiyel denklemlerle modellemeler yapılır. Lineer denklemler, süperpozisyon ilkesi işe yaradığı için daha kolay çözülebilirken, lineer olmayan denklemler çoğu zaman analitik olarak çözülemez. Bu nedenle, bu tür problemlerde sayısal yöntemlerden yararlanılmak zorunda kalınır. Özellikle iterasyon tabanlı teknikler, yaklaşık çözümler elde etmede sıkça kullanılır.

Bu çalışmada incelenen ilk problem, bir başlangıç değer problemidir. En küçük kareler yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözüm, analitik çözümle yüksek düzeyde uyum göstermektedir. İkinci ve üçüncü test problemlerinde, polinom derecesinin arttırılmasıyla birlikte nokta bazında hata oranlarının azaldığı gözlemlenmiştir. Son test probleminde ele alınan doğrusal olmayan sınır değer denklemi için de benzer biçimde oldukça düşük hata oranları elde edilmiştir. Yöntemde polinomların kullanımı, hem hesaplama süresi hem de çözüm hassasiyeti açısından optimum sonuçlar vermektedir. Elde edilen sonuçlar, en küçük kareler yönteminin doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmakta etkili, kararlı ve güvenilir bir teknik olduğunu göstermektedir. Genel olarak, önerilen bu yöntem; basit yapısının yanı sıra, hesaplama kolaylığı ve yüksek doğruluk potansiyeliyle, analitik çözümü zor veya mümkün olmayan problemlerin yaklaşık çözümünü bulmakta kullanılabilecek güçlü bir sayısal araç olarak değerlendirilebilir.

Anahtar Kelimeler – Nonlineer Denklem, Diferansiyel denklem, En Küçük Kareler, Yaklaşık Çözüm, Sayısal Analiz

GİRİŞ

Mühendislik ve fizikteki birçok problem lineer olan veya olmayan diferansiyel denklemlerle modellenir. Örneğin optik fiberlerde ışık darbelerinin yayılımı modellenirken dördüncü mertebeden doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklem kullanılır (Yanardağ, 2025). Akışkanlar mekaniğinde, sabit bir tek yönlü akışa paralel tutulan yarı sonsuz bir plaka üzerinde oluşan sabit iki boyutlu laminer sınır tabakasını tanımlayan Blasius denklemi üçüncü mertebeden bir nonlinear diferansiyel denklemdir (Parveen,

2016). Ayrıca ısı iletimi ve transferi, difüzyon, finansal matematik ve nükleer fizik gibi problemlerin birçok makalede nonlineer diferansiyel denklemlerle modellendiği görülmektedir (Biçer ve Dağ, 2019). Diferansiyel denklemlerin, lineer ve lineer olmayan denklem şeklinde olarak iki ana gruba ayrılarak incelenmesi genel kabul gören bir yöntemdir. Lineer diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri daha basit bir yapıya sahiptir ve genellikle bunlara süperpozisyon ilkesi uygulanabilir. Ancak aynı avantajlar Nonlineer diferansiyel denklemlerde mevcut değildir. Bu yüzden nonlineer denklemler çözülürken bazı sayısal tekniklere ihtiyaç vardır. Mesala, iterasyon bu türden denklemlerin çözümleri için yaklaşık sonuçlar elde etme amacıyla kullanılan yöntemlerden birisidir (Gülecan, 2019).

Bu çalışmada öncelikle en küçük kareler yöntemi tanıtılmış ve ardından literatürden seçilmiş olan bazı problemlerin yaklaşık çözümleri bu yöntemle bulunmuştur.

1- En Küçük Kareler (Least Square) Metodu

Nonlineer bir sınır değer problemi p terimi x'e bağlı en yüksek türevin derecesini göstermek üzere

$$\begin{aligned} &y^{(p)} + y^k + f(x, y, y', ..., y^{(p-1)}) = 0 \\ &y(x_1) = a \\ &y(x_2) = b \end{aligned} \tag{1}$$

ile gösterilebilir. Burada k bağımlı değişken y'nin kuvvetini göstermektedir. Bu probleme önerilen yaklaşık çözüm N polinomun derecesi olmak üzere

$$y_{yaklaşık} = \sum_{n=0}^{N} C_n x^n \tag{2}$$

şeklinde kabul edilsin. Bu çözümdeki C_N katsayılarını bulmak için öncelikle kalan

$$R(x) = y^{(p)}_{yaklaşık} + y^k_{yaklaşık} + h(x) \tag{3}$$

formülü ile kurulur. Ardından, bu kalan W_n ağırlık fonksiyonları olan ve

$$W_n = \frac{\partial R}{\partial C_n} \quad , \qquad n = 1, 2, 3, ..., N \tag{4}$$

denklem (4) ile verilen fonksiyonlarla çarpılarak denklem (1)' in sınırlarında integre edilerek bir denklem sistemi kurulur. Bu denklem sistemi

$$\int_{x_1}^{x_2} RW_n dx = 0 \tag{5}$$

şeklindedir. Denklem (5) ile verilen bu sistemin çözümü denklem (2) deki $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_N$ katsayılarını verecektir. Bu katsayıların bulunması ve yerine yazılmasıyla denklem (1) ile verilmiş olan probleme en küçük kareler yöntemiyle yaklaşık bir çözüm bulunmuş olur.

2- En Küçük Kareler Metodunun Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

En küçük Kareler Yöntemini ilk olarak verilen probleme uygulayalım (Hermann ve Saravi, 2016)

$$\begin{aligned} &y'(x) + y^2 = 0 \\ &y(0) = 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Problemin çözümü $y(x) = \frac{1}{(1+x)}$ dir. Yaklaşık çözümün

$$y = \sum_{n=0}^{5} C_n x^n \tag{7}$$

şeklinde olduğu kabul edilsin. Denklem (6) daki başlangıç değer şartı dikkate alınırsa (7) deki yaklaşık çözüm

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{5} C_n x^n \tag{8}$$

olacaktır. Bu çözümdeki bilinmeyen C_1, C_2, C_3, C_4 ve C_5 katsayılarının bulunması için kurulması gereken dört tane denklem gerekmektedir. Öncelikle kalan

$$R(x) = C_1 + 2xC_2 + 3x^2C_3 + 4x^3C_4 + 5x^4C_5 + \left(1 + xC_1 + x^2C_2 + x^3C_3 + x^4C_4 + x^5C_5\right)^2 \tag{9}$$

şeklinde yazılır. Yöntemde kullanılacak ağırlık fonksiyonları ise

$$W_i = \frac{\partial R}{\partial C_i}\ ,\ \ i = 1,2,3,4,5 \tag{10}$$

formülünden sırasıyla

$$
\begin{aligned}
W_1 &= 1 + 2x\left(1 + xC_1 + x^2C_2 + x^3C_3 + x^4C_4 + x^5C_5\right)\\
W_2 &= 2x + 2x^2\left(1 + xC_1 + x^2C_2 + x^3C_3 + x^4C_4 + x^5C_5\right)\\
W_3 &= 3x^2 + 2x^3\left(1 + xC_1 + x^2C_2 + x^3C_3 + x^4C_4 + x^5C_5\right)\\
W_4 &= 4x^3 + 2x^4\left(1 + xC_1 + x^2C_2 + x^3C_3 + x^4C_4 + x^5C_5\right)\\
W_5 &= 5x^4 + 2x^5\left(1 + xC_1 + x^2C_2 + x^3C_3 + x^4C_4 + x^5C_5\right)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

olarak yazılabilir. Bu fonksiyonlardan yararlanılarak kapalı formu

$$\int_0^1 R.W_i \mathrm{d}x = 0\ , \qquad i = 1,2,3,4,5 \tag{12}$$

olan beş bilinmeyenli beş adet denklemden oluşan sistem bulunur. Bu denklem sisteminin çözümü yaklaşık çözümün C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 katsayılarını

$$
\begin{aligned}
&C_1 = -0.997697,\ C_3 = -0.788627,\ \ C_5 = -0.109759\\
&C_2 = 0.961721,\ \ C_4 = 0.434364
\end{aligned}
\tag{13}
$$

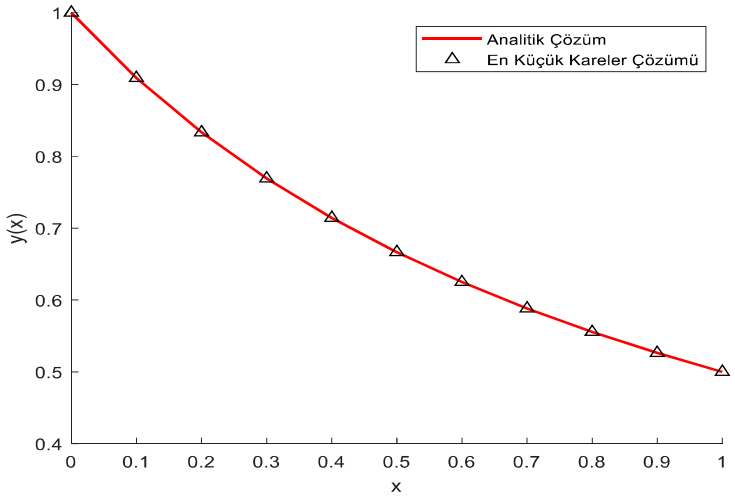
olarak verir. Bu katsayılar (8) denkleminde yerine yazılırsa (7) ile verilen başlangıç değer probleminin beşinci dereceden bir polinom kullanılarak bulunan yaklaşık çözümü

$$
\begin{aligned}
y_5(x) = &-0.109759x^5 + 0.434364x^4 - 0.788627x^3 + 0.961721x^2\\
&- 0.997697x + 1
\end{aligned}
\tag{14}
$$

gibi olacaktır. Denklem (15) ile altıncı ve yedinci dereceden polinomlar kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümler verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
y_6(x) &= 0.07x^6 - 0.33x^5 + 0.68x^4 - 0.91x^3 + 0.98x^2 - 0.99x + 1 \qquad (15)\\
y_7(x) &= -0.05x^7 + 0.25x^6 - 0.58x^5 + 0.84x^4 - 0.96x^3 + 0.99x^2 - 0.99x + 1
\end{aligned}
$$

Şekil 1 de Analitik ve yaklaşık çözümler karşılaştırılmıştır.



Şekil 1: Birinci başlangıç değer problemi için kesin ve yaklaşık çözümler

N en küçük kareler yönteminde kullanılan yaklaşık polinomun en yüksek derecesi olmak üzere, Tablo 1 de yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar farklı x değerleri için gösterilmiştir.

Tablo 1: Birinci başlangıç değer problemi için yaklaşık çözüm için yapılan mutlak hatalar

x	Mutlak Hatalar		
	N=5	N=6	N=7
0.0	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	$1.02\text{x}10^{-5}$	$3.57\text{x}10^{-6}$	$1.26\text{x}10^{-6}$
0.2	$5.32\text{x}10^{-5}$	$6.99\text{x}10^{-6}$	$1.11\text{x}10^{-7}$
0.3	$2.66\text{x}10^{-5}$	$5.83\text{x}10^{-6}$	$1.57\text{x}10^{-6}$
0.4	$3.40\text{x}10^{-5}$	$8.57\text{x}10^{-6}$	$3.91\text{x}10^{-7}$
0.5	$5.38\text{x}10^{-5}$	$1.60\text{x}10^{-6}$	$1.55\text{x}10^{-6}$
0.6	$1.57\text{x}10^{-5}$	$8.87\text{x}10^{-6}$	$1.43\text{x}10^{-7}$
0.7	$3.65\text{x}10^{-5}$	$2.79\text{x}10^{-6}$	$1.42\text{x}10^{-6}$
0.8	$4.07\text{x}10^{-5}$	$6.93\text{x}10^{-6}$	$2.64\text{x}10^{-7}$
0.9	$1.42\text{x}10^{-5}$	$1.53\text{x}10^{-6}$	$8.45\text{x}10^{-7}$
1.0	$9.99\text{x}10^{-7}$	$3.53\text{x}10^{-9}$	$1.52\text{x}10^{-10}$

En küçük kareler yöntemini aşağıdaki yüksek mertebeden başlangıç değer problemine uygulayalım (Hosseini, vd., 2015).

$$y''(x)+\frac{2}{x}y'(x)+y^5$$
$$y(0)=1 \qquad y'(0)=0 \tag{16}$$

Bu problem için Analitik çözüm

$$y_{analitik} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}} \tag{17}$$

olmaktadır. Bu problemin yaklaşık çözümü (16) denklemindeki şartlar göz önüne alınarak

$$y(x) = 1 + \sum_{n=2}^{3} C_n x^n \tag{18}$$

şekilde kabul edilirse ve denkleme yazılırsa kalan

$$2C_2 + 6xC_3 + \frac{2(2xC_2+3x^2C_3)}{x} + (1 + x^2C_2 + x^3C_3)^5 \tag{19}$$

olarak bulunur. Bu durumda katsayıları verecek olan denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$7.666666666666667 + 0.23809523809523808C_2^9 + C_2^8(2.3684210526315788 + 2.0454545454545454C_3) + C_2^7(10.588235294117647 + C_3(18. + 7.826086956521739C_3)) + C_2^6(28. + C_3(70. + C_3(60. + 17.5C_3))) + C_2^5(51.73426573426573 + C_3(157.5 + C_3(198.94736842105263 + C_3(114.54545454545455 + 25.2C_3)))) + C_2^4(73.93939393939394 + C_3(242.5 + C_3(370.5882352941176 + C_3(315. + C_3(136.95652173913044 + 24.23076923076923C_3))))) + C_2^3(80.95238095238095 + C_3(282. + C_3(456.9230769230769 + C_3(466.6666666666667 + C_3(300. + C_3(105. + 15.555555555555555C_3)))))) + C_2^2(61.714285714285715 + C_3(238.5 + C_3(405.31468531468533 + C_3(432.32142857142856 + C_3(331.57894736842104 + C_3(171.8181818181818 + C_3(50.4 + 6.428571428571429C_3)))))) + C_3(66. + C_3(62.857142857142854 + C_3(77. + C_3(62.76923076923077 + C_3(39.125 + C_3(20. + C_3(7.5 + (1.6666666666666667 + 0.16666666666666666C_3)C_3)))))) + C_2(65. + C_3(125. + C_3(234.54545454545453 + C_3(260. + C_3(205.2941176470588 + C_3(126. + C_3(54.78260869565217 + C_3(13.846153846153847 + 1.5517241379310345C_3)))))))) \tag{20}$$

$$7.25 + 0.22727272727272727C_2^9 + C_2^8(2.25 + 1.9565217391304348C_3) + C_2^7(10. + C_3(17.142857142857142 + 7.5C_3)) + C_2^6(26.25 + C_3(66.3157894736842 + C_3(57.27272727272727 + 16.8C_3))) + C_2^5(48.5 + C_3(148.23529411764707 + C_3(189. + C_3(109.56521739130434 + 24.23076923076923C_3)))) + C_2^4(70.5 + C_3(228.46153846153845 + C_3(350. + C_3(300. + C_3(131.25 + 23.333333333333332C_3))))) + C_2^3(79.5 + C_3(270.2097902097902 + C_3(432.32142857142856 + C_3(442.10526315789474 + C_3(286.3636363636364 + C_3(100.8 + 15.C_3)))))) + C_2^2(62.5 + C_3(234.54545454545453 + C_3(390. + C_3(410.5882352941176 + C_3(315. + C_3(164.34782608695653 + C_3(48.46153846153846 + 6.206896551724138C_3)))))) + C_3(78.42857142857143 + C_3(63. + C_3(75.94405594405595 + C_3(60.80357142857143 + C_3(37.39318885448916 + C_3(19.09090909090909 + C_3(7.2 + (1.6071428571428572 + 0.16129032258064516C_3)C_3)))))) + C_2(66. + C_3(125.71428571428571 + C_3(231. + C_3(251.07692307692307 + C_3(195.625 + C_3(120. + C_3(52.5 + C_3(13.333333333333334 + 1.5C_3)))))))) \tag{21}$$

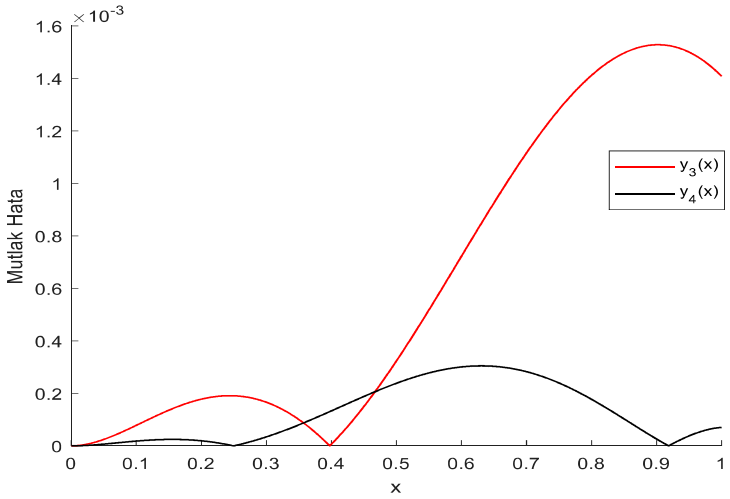
Bu sistemin çözümüyle C_2= -0.1786930365031 ve C_3=0.04612668250397 olarak bulunacaktır. Böylece denklem (18) ile verilmiş olan yaklaşık çözüm

$$y_3(x) = 0.04612668250397826x^3 - 0.1786930365031367x^2 + 1 \tag{22}$$

Eğer yaklaşık çözüm dördüncü dereceden bir polinom olarak önerilseydi.

$$\begin{aligned} y_4(x) = {} & 0.015094321220504187x^4 + 0.021208561905267733x^3 \\ & - 0.1703483667628002x^2 + 1 \end{aligned} \tag{23}$$

olan bir çözüm bulunacaktı. Şekil 2'de ikinci problem için bulunan bu iki yaklaşık çözümde nokta bazında yapılan mutlak hatalar grafik olarak gösterilmiştir.



Şekil 2: İkinci başlangıç değer problemindeki mutlak hatalar

Üçüncü bir problem olarak nonlineer ve değişken katsayılı homojen bir denklemi göz önüne alalım (Lu vd., 2020).

$$\begin{aligned} & y''(x) - \frac{y^3 - 2y^2}{2x^2} = 0 \\ & y(1) = 1 \quad , \quad y(2) = \frac{4}{3} \end{aligned} \tag{24}$$

İncelenen bu problemin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda olsun

$$y(x)=\sum_{n=0}^{4}C_n x^n \tag{25}$$

Denklem (24) verilmiş olan iki sınır şartı bu çözüme uygulanırsa

$$y(x)=\left(\frac{2}{3}+2C_2+6C_3+14C_4\right)+\left(\frac{1}{3}-3C_2-7C_3-15C_4\right)x+\sum_{n=2}^{4}C_n x^n \tag{26}$$

çözüm haline gelir. İlk parantezin içindeki terimler C_0 katsayısını gösteriyorken ikinci parantez içerisindekiler ise C_1 katsayısını ifade etmektedir. Buna göre önce kalan ve bu kalan kullanılarak ardından ağırlık fonksiyonları

$$W_i=\frac{\partial R}{\partial C_i}\ ,\ \ i=2,3,4 \tag{27}$$

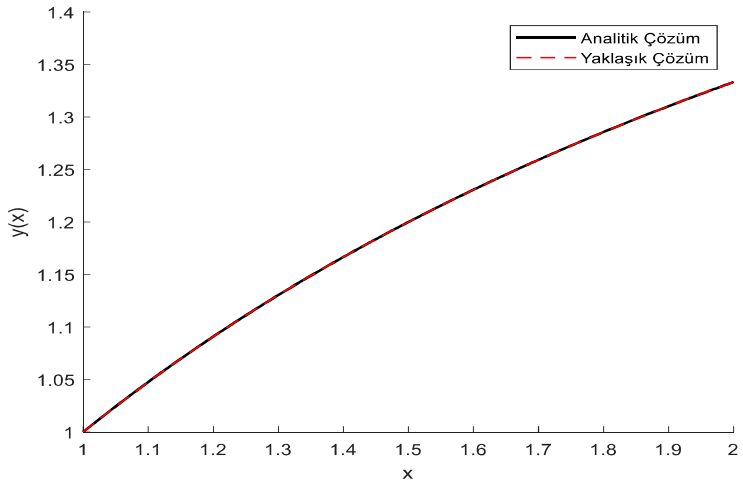
formülüyle hesaplanır. Ayrıca C_2, C_3 ve C_4 katsayılarını verecek olan denklem sistemi ise

$$\int_1^2 (R\,W_i)\,\mathrm{d}x \tag{28}$$

ile oluşturulur. Bu sistemin çözümü ile bulunan bu katsayılar (25) denkleminde yerine yazılarak aranan yaklaşık çözüm

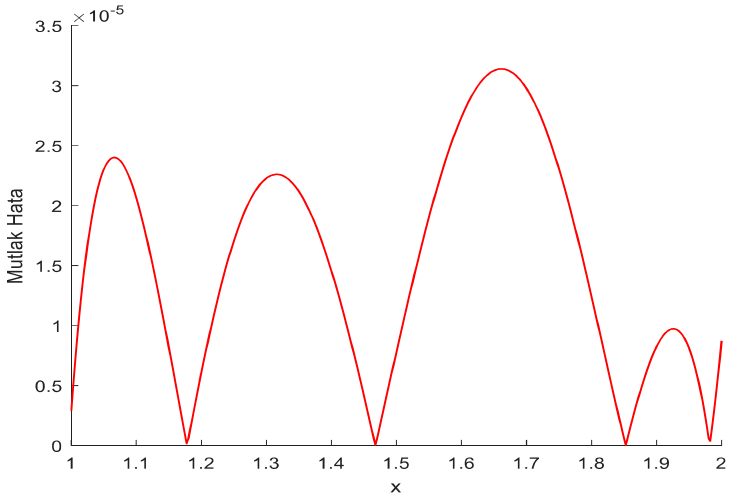
$$y_4(x)=-0.021916x^4+0.185770x^3-0.667932x^2+1.365491x+0.138587 \tag{29}$$

olarak elde edilir. Şekil 3 de üçüncü problem için analitik ve yaklaşık çözümler grafik olarak verilmiştir.



Şekil 3: Üçüncü problem için analitik ve yaklaşık çözümler

Şekil 4 de ise mutlak hatalar farklı x' lere karşılık hesaplama sırasında yapılan mutlak hatalar görülmektedir.



Şekil 4: Üçüncü problem için mutlak hatalar

Son olarak yöntemi aşağıda verilen diferansiyel denkleme uygulayalım (Yarcı, 2008).

$$y''(x) - \frac{1}{2}y^3(x) = 0$$
$$y(1) = \frac{2}{3} \quad , \quad y(3) = \frac{2}{5} \tag{30}$$

Verilen problemin analitik çözümü $\frac{2}{2+x}$ dir. Yaklaşık çözüm olarak aşağıdaki dördüncü dereceden polinom önerilmiş olsun.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{4} C_n x^n \tag{31}$$

Sınır şartlarına göre bu çözüm

$$y(x) = \left(\frac{4}{5} + 3C_2 + 12C_3 + 39C_4\right) + \left(-\frac{2}{15} - 4C_2 - 13C_3 - 40C_4\right)x + \sum_{n=2}^{4} C_n x^n \tag{32}$$

ile verilen formda olmalıdır. Diğer örneklerdeki işlem adımları uygulanarak yaklaşık çözüm

$$y_4(x) = 0.002243x^4 - 0.026820x^3 + 0.138133x^2 - 0.426941x + 0.980051 \tag{33}$$

Tablo 2 problemin analitik çözüm ve bu yaklaşık çözümün çeşitli x'lere karşılk gelen değerleri ve hesaplama sırasında yapılan nokta bazındaki hatalar verilmiştir.

Tablo 2: Son problem için farklı x'ler için analitik ve yaklaşık çözümler, mutlak hatlar

x	$y_{Analitik}$	$y_{yaklaşık}$	Mutlak Hata
1.0	0.666667	0.666667	1.11×10^{-16}
1.2	0.625000	0.624940	5.96×10^{-5}
1.4	0.588235	0.588098	1.36×10^{-4}
1.6	0.555556	0.555413	1.42×10^{-4}
1.8	0.526316	0.526243	7.21×10^{-5}
2.0	0.500000	0.500034	3.45×10^{-5}
2.2	0.47619	0.476317	1.26×10^{-4}
2.4	0.454545	0.454708	1.63×10^{-4}
2.6	0.434783	0.434912	1.29×10^{-4}
2.8	0.416667	0.416717	5.06×10^{-5}
3.0	0.400000	0.400000	2.22×10^{-16}

SONUÇ

İncelenen ilk problem bir başlangıç değer problemidir. Bu probleme en küçük kareler yöntemiyle bulunan yaklaşık çözüm, Şekil 1'de görüldüğü gibi analitik çözümle uyumludur. İkinci test probleminin mevcut yöntemle üçüncü ve dördüncü dereceden yaklaşık çözümlerinde yapılan hatalar Şekil 2' de verilmiştir ve buna göre polinom derecesi arttıkça mutlak hata azalmaktadır. Bir sınır değer problemi olan üçüncü test probleminde yaklaşık çözüm için dördüncü dereceden bir polinomun önerilmesi yeterli olmuştur. Şekil 3 bu çözümle, analitik çözümün uyumluluğunu göstermektedir. Şekil 4' e göre bu problem için hesaplamada yapılan mutlak hatalar kabul edilebilecek kadar küçük olmaktadır. Son test problemi ise nonlineer bir sınır değer problemidir. Bir önceki problemde olduğu gibi burada da dördüncü dereceden bir yaklaşık çözüm oldukça küçük hesaplama hatalarına sahiptir.

Bu çalışmada önerilen en küçük kareler yöntemiyle nonlineer diferansiyel denklemlere uygun yaklaşık çözümler bulunmuştur. Polinom şeklinde yaklaşık çözümün önerilmesi hem işlem hem de programlama kolaylığı sağlamaktadır. Yöntem basit ve etkili bir yaklaşık çözüm bulmaya imkan verir.

REFERANSLAR

Biçer K. E., and Dağ H. G. (2023). Numerical solutions of differential equations having cubic nonlinearity using Boole collocation method. *Turkish Journal of Mathematics*, 47(2), 732–745. https://doi.org/10.55730/1300-0098.3391

Gülecan, T. (2019). Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümüne farklı bir yaklaşım (Yüksek Lisans Tezi). Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Hermann, M. and Saravi, H. (2016). Nonlinear ordinary differential equations : Analytical Approximation and Numerical Methods (1 st). Springer India.

Hosseini, S.Gh. and Abbasbandy, S. (2015). Solution of lane-emden type equations by combination of the spectral method and adomian decomposition method. *Mathematical Problems in Engineering, Volume 2015,* Article ID 534754 https://doi.org/10.1155/2015/534754

Lu, Y., Yin, Q., Li, H., Sun, H., Yang, Y., and Hou, M. (2020). Solving higher order nonlinear ordinary differential equations with least squares support vector machines. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 16(3), 1481–1502. https://doi.org/10.3934/jimo.2019012

Summiya Parveen, S. (2016). Numerical Solution of Non Linear Differential Equation by Using Shooting Techniques. *International Journal of Mathematics And Its Applications*, 4(1 - A), 93–100.

Yanardağ, Y. (2025). Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve tam çözüm yöntemleri (Yüksek Lisans Tezi). Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Bilecik.

Yarcı, H. (2008). On the Solutions of Non-Linear Boundary Value Problems (Yüksek Lisans tezi). Dokuz Eylül University Graduate School Of Natural And Applied Sciences, İzmir.