PLAKA SERBEST TİTREŞİMİ İÇİN SUBDOMAİN YÖNTEMİ

Dr. Birkan DURAK

ORCID: 0000-0002-8196-5407
birkand@iuc.edu.tr
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu,
Elektrik Ve Enerji Bölümü, İklimlendirme Soğutma Teknolojisi Programı, İstanbul, Türkiye

Özet

Bir boyutu diğer iki boyutuna nazaran çok daha küçük olan yapılar mühendislikte plaka olarak adlandırılır. Plakalar gündelik hayatta ve çeşitli mühendislik uygulamalarında çok farklı amaçlarla kullanılırlar. Çalışma şartlarında plakaların maruz kalacağı kuvvetlerin ve titreşimlerin bilinmesi tasarımları, kullanılabilirlikleri ve hizmet ömürlerinin tespitinde oldukça önemlidir. Plakaların zorlanmış titreşimlerinin incelenmesi sırasında ilk aşamada serbest titreşime ait öz değerlerin hesaplanması gerçek problemin doğası hakkında önemli bilgiler sağlamaktadır.

Çalışmada bir plakanın serbest titreşimine ait olan öz değerler Subdomain (alt bölge) yöntemiyle hesaplanmıştır. Sonsuz uzun bir plakanın titreşiminin incelenmesi sırasında önce boyutsuzlaştırma yapılmış ardından çözüm olarak sınır şartlarını sağlayan bir fonksiyon ailesi önerilmiştir. Polinom temelli bu fonksiyon ailesi sayesinde yöntemdeki integraller kolaylıkla alınabilmiştir. Ardından probleme uygun yaklaşık çözüm bulunabilmiştir. Subdomain (alt bölge) yönteminde çözüm bulunurken sınırlar arasında kalan bölge istenilen sayıda alt bölgeye ayrılır ve her bir bölge için yapılan hesaplamalar bir denklem verir bunun sonucunda bir denklem sistemi kurularak çözülür. Bu özellik sayesinde çatlak, oyuk vb. süreksizliğe sahip malzemelerin titreşiminin bu yöntemle incelenmesi daha kolay hale gelmektedir. Hesaplamalar alt bölge sayısının artışının belirli bir noktadan sonra öz değerin ondalık basamaklarında küçük değişikliklere sebep olduğunu göstermiştir. Yöntem bir plakanın serbest titreşim problemine uygulanarak yeterli hassasiyette öz değerler bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Plaka, Titreşim, Öz değer, Subdomain Yöntemi, Ağırlıklı kalanlar Yöntemi

SUBDOMAIN METHOD FOR FREE PLATE VIBRATION

Abstract

In engineering, structures with one dimension much smaller than the other two are called plates. They are used for a variety of purposes in daily life and in numerous engineering applications. It is crucial to understand the forces and vibrations that plates will encounter during operation to ensure their optimal design, usability, and service life. During the examination of forced vibrations of plates, the calculation of eigenvalues of free vibration in the initial stage provides valuable insight into the nature of the underlying problem.

In the study, the eigenvalues belonging to the free vibration of a plate were calculated with the Subdomain method. During the examination of the vibration of an infinitely long plate, first non-dimensionalization was performed and then a function family that provided the boundary conditions was proposed as a solution. The polynomial-based function family facilitates the evaluation of the integrals in the method, thus enabling the identification of a suitable approximate solution for the problem. In the Subdomain method, the region between the boundaries is divided into the desired number of subregions, and the calculations performed for each region yield an equation. Consequently, an equation system is established and solved. Thanks to this feature, it becomes easier to examine the vibration of materials with discontinuities such as cracks, holes, etc. with this method. Calculations have shown that increasing the number of subregions causes small changes in the decimal places of the eigenvalue after a certain point. The method was applied to the free vibration problem of a plate and eigenvalues with sufficient precision were found.

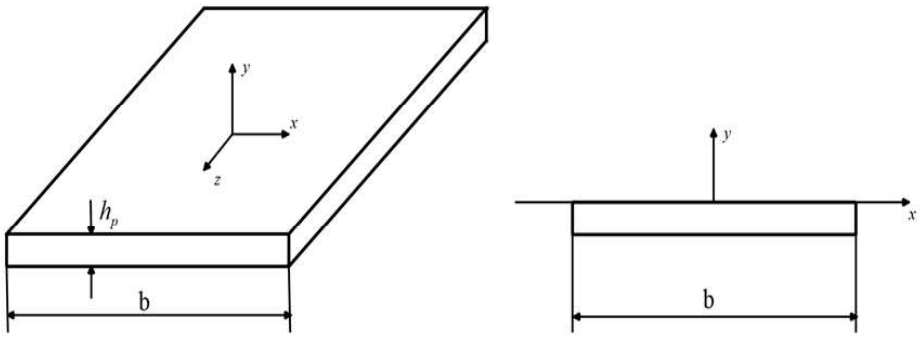
Keywords: Plate, Vibration, Eigenvalue, Subdomain Method, Weighted Residual Method

GİRİŞ

Mühendislikte çeşitli yapılarda ve sistemlerde plakalar geniş oranda kullanılırlar. Bu elemanların serbest ve zorlanmış titreşimlerinin anlaşılabilmesi için bunlara ait problemin bir öz değer değer problemi olarak incelenmesi gerekmektedir.

MATERYAL VE METHOD

Şekil 1 de sonsuz uzun bir plaka görülmektedir. Bu plakanın genişliği b ve kalınlığı ise h_p dir. Bu plaka her iki tarafından rijit bir zemin üzerine basit mesnetlenmiştir.



Şekil 1. Sonsuz uzun plaka

Hareket denklemi aşağıdaki formda verilir (Dowell 1966, Epstein vd. 1995, Uzal ve Körbahti 2010).

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho_p h_p\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+P=0 \tag{1}$$

Bu denklemde P plaka üzerinden akışkan geçişi sırasında meydana gelen basıncı göstermektedir. Plakanın serbest titreşim halinde terim sıfırdır. ρ_p plaka yoğunluğu ve D ise plaka eğilme rijitliğidir. Plakanın y eksenindeki hareketi dikkate alınmadan tek boyutlu haldeki hareketi incelenecektir.

$$\frac{Eh_p{}^3}{12(1-\upsilon^2)} \tag{1}$$

Denklem (2) de E Elastite modülünü, h_p plaka kalınlığını ve ν ise possion oranını göstermektedir. Plaka yer değiştirmesi w $= W(x)e^{i\omega t}$ olsun bu durumda ve boyutsuzlaştırmayla denklem (1) ile verilen hareket denklemi aşağıdaki basit hale gelecektir.

$$D\frac{d^4W}{dx^4}-\omega^2\rho_p h_p W=0$$
$$W(\pm 1/2)=0 \qquad (3)$$
$$\frac{d^2W}{dx^2}(\pm 1/2)=0$$

Bu denklemin çözümü denklem (4) ile verilir.

$$W(x)=C_1\,\mathrm{Cos}(kx)+C_2\,\mathrm{Sin}(kx)+C_3\,\mathrm{Cosh}(kx)+C_4\,\mathrm{Sinh}(kx) \qquad (4)$$

$k=\sqrt[4]{\frac{\omega^2\rho_p h_p}{D}}$ olduğuna dikkat edilerek denklem (3) deki dört adet sınır şart bu çözüme uygulanırsa. Dört bilinmeyenli dört denkleme sahip bir sisteme ulaşılır. Bu denklem sisteminde $C_1, C_2, C_3, C_4 \neq 0$ olacak şekilde çözümlerin varlığı için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenir. Bu determinant sadece problemin öz değeri olan ω nın bir fonksiyonudur. Eğer $\nu = 0.3$, $E = 70.10^9$ N/m^2, $h_p = 0.01\ m$ ve $\rho_p = 2720\ kg/m^3$ için plakanın serbest titreşimindeki ilk üç öz değer sırasıyla $\omega_1 = 151.5130$, $\omega_2 = 606.0520$ ve $\omega_3 = 1363.6170$ olarak bulunur.

Subdomain (Alt Bölge) Yöntemi

Bir sınır değer problemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$L[u(x)] - f(x) = 0$$
$$u(x_1) = a \qquad (5)$$
$$u(x_2) = b$$

Bu denklemdeki x_1, x_2, a ve b reel sayıdır. L diferansiyel operatörü göstermektedir ve $f(x)$ ise homojenliği bozan terimlerdir. Denklem (5) ile verilen probleme subdomain (alt bölge) yöntemi uygulanırken ilk adımda problemin yaklaşık çözümü

$$\tilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \psi_n(x) \tag{6}$$

olarak kabul edilir. Bu ifadede C_n yaklaşık çözümdeki katsayıları ve $\psi_n(x)$ ise sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlardır. Bu çözüm denklem (5) te yerine yazılarak kalan denklem (7) de verildiği gibi bulunur.

$$R(x) = L[\tilde{u}(x)] - f(x) = L[\sum_{n=1}^{N} C_n \psi_n(x)] - f(x) \tag{7}$$

Eğer denklem (7) deki kalan kalan sıfır ise denklem (5) ile verilen problemin kesin çözümü bulunmuş demektir. Ancak yaklaşık bir çözüm arandığından kalan başlangıçta sıfır değildir. Yaklaşık çözümdeki katsayılar olan $C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$ ' leri bulmak için $R(x)$ aşağıda verilen ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak problemin sınırlarında integre edilir ve sıfıra eşitlenir.

$$W_i = \begin{cases} 1 & , \quad x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & , \quad x \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \tag{8}$$

Sonuç olarak

$$R_{ni} = \int_a^b R_n(x) W_i(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} R_n(x) dx = 0 \qquad n, i = 1,2,3, \dots \dots, N \tag{9}$$

Denklem (9) ile verilen denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sistemi

$$R_{ni} = \sum_{n=1}^{N} C_n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[D \frac{d^4 \psi_n(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho_p h_p \psi_n(x) \right] dx \qquad n, i = 1,2,3, \dots \dots, N \tag{10}$$

olarak yazılabilir. Denklem (10) daki alt integrasyon sınırları için

$$x_i = a + \frac{(b-a)i}{N} \tag{11}$$

eşitliği geçerlidir. (11) eşitliği (10) yazılarak ve N'ye değerler verilerek denklem (9) daki $R_{11}, R_{22}, R_{33}, \dots, R_{NN}$ ifadeleri bulunabilir. Burada N alt bölge sayısını göstermektedir. Denklem (9) daki R_n ifadesi sadece C_n ve ω 'nın fonksiyonudur. O halde denklem (10)'nun matris formu

$$[R_{ni}(\omega^2)]_{NxN} \cdot [C_n]_{Nx1} = [0]_{Nx1} \quad (12)$$

olarak yazılabilir. $C_1, C_2, C_3, \dots, C_N \neq 0$ olacak şekilde yani sıfır çözümü dışındaki bir çözüm için $det\,[R_{ni}(\omega^2)] = 0$ şartı gereklidir. Bu determinant ω'nın bir fonksiyonudur ve kökleri plakanın serbest titreşiminin öz değerlerini verir.

BULGULAR

Subdomain yöntemini N = 2 için plaka problemine uygulayalım. $a = -1/2$ ve $b = 1/2$ dir. İki bölge olduğundan integral sınırları sırasıyla $-1/2, 0$ ve $1/2$ olacaktır. Denklem (3) ile verilen problemin için sınır şartlarını sağlayan deneme fonksiyonları aşağıdaki formdadır.

$$\psi_n(x) = x^{n+3} - \frac{(2n+1)}{(4n-2)}x^{n+1} + \frac{(2n+3)}{16(2n-1)}x^{n-1} \quad (13)$$

Denklem (13) ile verilen deneme fonksiyonu ailesine göre kalan için aşağıdaki sonuç bulunur

$$R(x) = 6410.26(24.C_1 + 120.xC_2) - 27.2\omega^2((0.3125 - 1.5x^2 + x^4)C_1 + (0.1458333x - 0.833333333333x^3 + x^5)C_2) \quad (14)$$

Buna göre denklem (9) ve denklem (10) dan yararlanılarak

$$\int_{-1/2}^{0} R\,dx = 0$$
$$\int_{0}^{1/2} R\,dx = 0 \quad (15)$$

elde edilir. Bu ifadelerin ifadelerinin hesaplanmasıyla oluşan denklem sisteminin matris formu

$$\begin{bmatrix} 76923.12 - 2.72\omega^2 & -96153.90000000001 + 0.2125\omega^2 \\ 76923.12 - 2.72\omega^2 & 96153.90000000001 - 0.2125\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

olacaktır.

Katsayılar matrisinin determinantı ve onun köklerinden pozitif olanları sırasıyla aşağıdadır.

$$1.4792915976336 \times 10^{10} - 555769.542\omega^2 + 1.1560000000000001\omega^4 \quad (17)$$

$\omega_1 = 168.168$ ve $\omega_2 = 672.672$

Tablo 1. de N in farklı değerleri için bulunan ilk üç öz değerler analitik sonuçla bulunan değerleriyle karşılaştırılmıştır.

Tablo 1. Subdomain yönteminde Farklı N değerleri için bulunan öz değerler

		Subdomain yöntemiyle bulunan							
Öz değer	Analitik	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9
ω_1	151.5130	168.1682	150.9582	151.2259	151.5220	151.5188	151.5140	151.5140	151.5141
ω_2	606.0520	672.6729	727.0687	593.4818	598.9409	606.7747	606.4902	606.0289	606.0389
ω_3	1363.6170	--------	1530.0763	1727.5117	1293.7000	1321.4189	1373.2613	1369.4310	1362.8924

SONUÇ

Mevcut çalışmada bir plakanın serbest titreşiminin öz değerleri Subdomain (alt bölge) yöntemiyle hesaplanmıştır. Kullanılan polinom temelli fonksiyon ailesiyle yöntemdeki integraller kolaylıkla alınabilmiştir. Yöntemde sınırlar arasında kalan bölge istenilen sayıda alt bölgeye ayrılır ve her bir bölge için bir denklem bulunur. Bu özellik sayesinde çatlak, oyuk vb. süreksizliğe sahip malzemelerin titreşiminin bu yöntemle incelenmesi daha kolay hale gelmektedir. Hesaplamalar alt bölge sayısının artışının belirli bir noktadan sonra öz değerin ondalık basamaklarında küçük değişikliklere sebep olduğunu göstermiştir. Subdomain yöntemi bir plakanın serbest titreşim problemine için uygun sayısal yöntemdir.

KAYNAKÇA

Dowell, E.H. (1966), "Flutter of infinitely long plates and shells part I: plate", AIAA Journal, 4 (8), 1370-1377. https://doi.org/10.2514/3.3680

Epstein R.J., Srinivasan, R, Dowell, E.H. (1995), "Flutter of an infinitely long panel in a duct", AIAA Journal, 33 (1), 109-115. https://doi.org/10.2514/3.12339

Uzal, E., Körbahti, B., (2010), "Vibration control of an elastic strip by a singular force", Indian academy of sciences, sadhana, 35 (2), 233-240. https://doi.org/10.1007/s12046-010-0020-2