ANKARA V. INTERNATIONAL
SCIENTIFIC RESEARCH CONGRESS
October 10-12, 2021 / Ankara- TURKEY
(THE PROCEEDINGS BOOK)
WEB: https://en.ankarakongresi.org/
E-MAIL: bilgi@ankarakongresi.org

LİNEER SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN GALERKİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Dr. Birkan DURAK
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, İklimlendirme ve Soğutma Teknolojisi Programı
ORCID: 0000-0002-8196-5407

ÖZET
Mühendislikte kullanılan çoğu diferansiyel denklem sabit katsayılı ve lineerdir. Diferansiyel denklem teorisinde bu tür denklemlerin genel veya özel çözümlerini bulmak için çeşitli analitik yöntemler vardır. Değişken katsayılı veya doğrusal olmayan denklemler için literatürde doğrusal denklemlerdeki kadar fazla çözüm yöntemi mevcut değildir. Seri yöntemi değişken katsayılı denklemlerin çözümlerini bulmada en sık uygulanan yöntemdir. Ancak bazı problemlerde seri çözümü meydana getirecek olan tekrarlama bağıntısının bulunmasında çeşitli sorunlarla karşılaşılmaktadır.
Bu çalışmada fizik ve mühendislikte sıklıkla karşılan Lineer Sınır Değer Problemleri için yaklaşık bir çözüm metodu verilmiştir. Ağırlıklı kalanlar metodlarından birisi olan Galerkin yöntemi hakkında kısa bir bilgilendirme yapılmıştır. Galerkin yöntemi, yaklaşık çözümde polinom kullanma avantajının yanı sıra, daha yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünü basit integrasyon hesaplamalarıyla bir denklem sisteminin çözümüne indirgeme şansı verir. Yöntemin diferansiyel denklemlere uygulanması sırasında oluşan denklemlerin çözümü, yaklaşık çözümün katsayılarını verir.
Yöntem öncelikle ikinci dereceden sabit katsayılı homojen ve değişken katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Galerkin yöntemi beşinci dereceden homojen olmayan bir denkleme de kolaylıkla uygulanabilmiştir. İncelenen bu problemlerde yöntemi problem çözümünde kullanılırken deneme fonksiyonlarını sınır şartlarını sağlayan basit polinomlar olaraak seçmek yeterli olmuştur. Bu sayede daha basit programlama adımlarıyla yaklaşık çözümler bulunmuştur. Seçilen problemlerin sayısal çözümleri diğer araştırmacıların çalışmaları göz önüne alındığında fazla karmaşık olmayan işlemlerle ve belirli bir hata hassasiyetinde yaklaşık çözümlere ulaşılabileceğini göstermiştir. Yöntemde deneme fonksiyonu olarak seçilen polinomun derecesinin arttırılmasıyla mutlak hata miktarının daha da azaltılabileceği gösterilmiştir.
Bu yöntem, daha sonraki çalışmalarda lineer olan çeşitli sabit veya değişken katsayılı yüksek mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanabileceği gibi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünü, integral veya integrodiferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için de kullanılabilir. Galerkin yöntemi bashedilen denklem türlerinin nonlineer olanları içinde uygun bir yaklaşık çözüm bulma tekniği olacaktır.
Anahtar Kelimeler: Galerkin Yöntemi, Lineer Diferansiyel Denklemler, Sınır Değer Problemleri,Yaklaşık Çözüm

ANKARA V. INTERNATIONAL
SCIENTIFIC RESEARCH CONGRESS
October 10-12, 2021 / Ankara- TURKEY
(THE PROCEEDINGS BOOK)
WEB: https://en.ankarakongresi.org/
E-MAIL: bilgi@ankarakongresi.org

GALERKIN APPROXIMATE SOLUTIONS OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS

ABSTRACT

Most differential equations used in engineering are constant coefficients and linear. In differential equation theory, there are various analytical methods to find general or particular solutions of such equations. There are not as many solution methods available in the literature for variable coefficient or nonlinear equations as for linear equations. The series method is the most commonly used method to find solutions to equations with variable coefficients. However, in some problems, various difficulty are encountered in finding the recurrence relation that creates the series solution.

In this study, an approximate solution method is given for Linear Boundary Value Problems, which are frequently encountered in physics and engineering. A brief information was given about the Galerkin method, which is one of the weighted residual methods. Galerkin method, in addition to the advantages of using polynomial for approximate solution, than the solutions of higher order differential equation gives a reduced chance of the solution of the equation system with simple integration calculations. The solution of the equations formed during the application of the method to the differential equations gives the coefficients of the approximate solution.

Firstly, the method is applied to second order homogeneous differential equations with constant coefficients and inhomogeneous differential equations with variable coefficients. Galerkin method can also be easily implemented to a fifth-order inhomogeneous equation. In these examined problems, it was sufficient to choose the trial functions as simple polynomials satisfying the boundary conditions while using the method for problem solving. In this way, approximate solutions were found by simpler programming steps. Considering the numerical solutions of the selected problems as well as the studies of other researchers, it is seen that approximate solutions with a certain error sensitivity can be reached with calculation steps that are not too complicated. By increasing the degree of the polynomial chosen as the trial function in the method, the value of absolute error can be further reduced.

In further studies, this method can be applied to various linear high-order differential equations with constant or variable coefficients as well as to find the solution of differential equation systems, approximate solutions of integral or integrodifferential equations. Galerkin method will be a sufficient approximation technique for the nonlinear ones of the aforementioned equation types.

Keywords: Galerkin Method, Linear Differential Equations, Boundary Value Problems, Approximate Solution

1. GİRİŞ

Fizik ve mühendislikte bir matematiksel model oluşturulurken diferansiyel denklemlerden yararlanılır. Bir diferansiyel denklemin özel çözümü bağımsız değişkenin en az iki farklı değeri için aranıyorsa bu problem matematikte sınır değer problemi olarak adlandırılır. Lineer sınır değer problemlerinin çözümü için fazla sayıda analitik veya yarı analitik yöntemler bulunmaktadır. Değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasında kullanılabilecek yöntemler sabit katsayılı denklemlerde olduğu kadar fazla değildir. Bir denklem değişken katsayılı ise çözümünü bulmak için kullanılabilecek ilk yöntem seri yöntemidir.

Bu yöntemle çözüm arayışı literatüre Legendre, Bessel, Lauguerre, Hermite vb. polinomları kazandırmıştır. Araştırmacılar seri yönteminde bazı durumlarda karşılaştıkları güçlükleri aşmak için çeşitli sayısal yöntemleri kullanmayı tercih etmektedirler. Adi diferansiyel denklem şeklinde ifade edilmiş olan problemlerin sayısal çözümünde kullanılan bazı sayısal yöntemler atış, sonlu farklar, varyasyon (değişim), belirsiz parametreler ve sonlu elemanlar yöntemleridir (Bakioğlu, 2006). Bazı yaklaşık çözüm bulma yöntemleri çeşitli dönüşümleri gerektirdiğinden işlem adımları uzamaktadır. Ağırlıklı Kalanlar Yöntemlerinden birisi olan Galerkin yöntemi kullanılarak çeşitli tipten diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerine daha basit işlemlerle ulaşılabilir.

2. MATERYAL VE METOT

Belirsiz parametreler yönteminde yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılan sınır değer probleminin yaklaşık çözümü çeşitli parametrelere bağlı olarak $y \approx u(x, c_1, c_2, \dots\dots, c_n)$ şeklinde kabul edilir (Bakioğlu, 2011). Sınır şartlarını sağlayıp diferansiyel denklemi sağlamayan bu çözümdeki katsayıları bulmak için bir ağırlık fonksiyonun kullanıldığı yöntemlere Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi adı verilir.

2.1. Ağırlıklı Kalanlar Yöntemleri (Weighted Residuals Methods)

L diferansiyel operatörü göstermek, a ve b birer reel sayı olmak üzere bir sınır değer problemi

$$\begin{aligned} &L[y(x)] = f(x) \\ &y(x_1) = a \\ &y(x_2) = b \end{aligned} \qquad (1)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemin yaklaşık çözümü $\tilde{y}(x)$ olsun. Bu çözüm diferansiyel denkleme yazılırsa çözümün gerçek değeri ile yaklaşık değeri arasındaki fark aşağıdaki gibi olacaktır.

$$R(x) = L[\tilde{y}(x)] - f(x) \neq 0 \qquad (2)$$

Denklemin sol tarafındaki ifade R(x) kalandır. Ağırlıklı kalanlar yönteminin esasını (2) denklemiyle yazılan kalanı, ağırlık fonksiyonu adı verilen bir fonksiyonla çarpmak ve (1) denklemindeki sınırlarda bu çarpımı integre ederek sıfırlamaya çalışmak oluşturur. Bu işlem sonucunda

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x) W_i(x)\, dx = 0 \qquad i = 1, 2, \dots\dots, n \qquad (3)$$

(3) ile verilen formüle ulaşılır. Burada $W_i(x)$ 'ler ağırlık fonksiyonu olarak isimlendirilir. Bu yöntemde ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak, farklı Ağırlıklı kalan yöntemleri vardır. Örneğin; Kollokasyon, En küçük kareler, Galerkin ve Rayleigh–Ritz yöntemleri (Chakraverty vd., 2019).

2.2. Galerkin Yöntemi (Galerkin Method)

Lineer bir diferansiyel denkleme Ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden Galerkin yöntemi uygulanmak istenirse (3) ile verilen denklemde ağırlık fonksiyonu için $W_i(x) = \frac{\partial y}{\partial C_i}$ yazmak gerekir. Böylece denklem (3)

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x)\frac{\partial \tilde{y}}{\partial C_i}dx = 0 \qquad i = 1,2,.....,n \tag{4}$$

haline gelir. Burada C_i katsayıları, diferansiyel denklemin sınır şartlarını sağlayan deneme (taban) fonksiyonlarının lineer toplamındaki katsayılardır. Bir diferansiyel denklemin bu yöntem ile yaklaşık çözümü aranırken sınır şartları ve (4) denklemi kullanılır. (1) ile verilen diferansiyel denklemin sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlar yani deneme fonksiyonları $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$,……, $y_n(x)$ şeklinde olsun denklemin yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + C_3\, y_3.(x)..... + C_n\, y_n(x) \tag{5}$$

olarak yazılabilir. Deneme fonksiyonları iki farklı teknikle oluşturulabilir. Birincisinde deneme fonksiyonu için bağımsız değişken x in azalan kuvvetlerini içeren bir polinom kabul edilir. Deneme fonksiyonu, n bir parametre olmak üzere

$$y_n(x) = x^n + B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + B_{n-3}x^{n-3} + ... + B_0 \tag{6}$$

formunda alınmış olsun. Sınır şartları (6) denklemine sağlatılır ve oluşan denklem sistemi matris formunda yazılır. Denklem sistemi n 'ye bağlı olarak değişmektedir. $n = 1,2,3 \ldots N$ verilerek $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$,……, $y_N(x)$ ifadelerindeki katsayıları bulunur. Oluşan bu fonksiyon ailesinin n parametresine bağlı olarak kuralı bulunur ve (5) denkleminde kullanılır. Deneme fonksiyonunu belirlemede kullanılan ikinci teknikte taban fonksiyonu olarak

$$\tilde{y} = \sum_{n=0}^{N} C_n\, x^n \tag{7}$$

şeklinde bir polinom alınır. Diferansiyel denklemin sınır şartları (7) denkleminde kullanılarak, sınır şartlarının sayısı kadar katsayı, geriye kalan katsayılar cinsinden yazılır. Bu durumda (7) denklemindeki bilinmeyen C_1, C_2, C_3,……, C_n katsayılarını hesaplamak için

$$\int_{a}^{b} R(x)\frac{\partial \tilde{y}(x)}{\partial C_i}dx = 0 \qquad i = 1,2,.....,n \tag{8}$$

(8) denklemi ile kapalı formda verilen denklem sistemi çözülür. Her iki tekniğin de kendine göre avantajları vardır. Bu çalışmada ikinci teknik tercih edilmiştir. Probleme özgü olarak deneme fonksiyonu olarak trigonometrik, üstel, hiperbolik vb. fonksiyon türleri de seçilebilir.

2.3. Galerkin Yönteminin Lineer Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Galerkin yöntemini aşağıda sınır şartları ile verilen lineer diferansiyel denkleme uygulayalım (Çavuşoğlu, 2017).

$$y''(x)-y(x)=0 \qquad y(0)=0\ ,\ y(1)=1 \tag{9}$$

verilen problemin gerçek çözümü $y(x)=\frac{e}{e^2-1}(e^x-e^{-x})$ olmaktadır. Bu problemin yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x)=\sum_{n=0}^{5}C_n x^n = C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5 \tag{10}$$

şeklinde olsun. Sınır şartları bu çözüme uygulanırsa katsayılar arasında

$$y(0)=0 \ \Rightarrow\ C_0=0 \qquad y(1)=1 \ \Rightarrow\ C_1=1-C_2-C_3-C_4-C_5 \tag{11}$$

eşitliği bulunacaktır. Bu sonuçlar denklem (10) da yerine yazılırsa yaklaşık çözüm

$$\tilde{y}(x)=(1-C_2-C_3-C_4-C_5)x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5$$
$$\tilde{y}(x)=(1-C_2-C_3-C_4-C_5)x+\sum_{n=2}^{5}C_n x^n \tag{12}$$

haline gelir. Bu çözüm (9) ile verilen diferansiyel denklemde kullanılırsa R(x) yani kalan

$$R(x)=-x+(2+x-x^2)C_2+(7x-x^3)C_3+(x+12x^2-x^4)C_4+(x+20x^3-x^5)C_5 \tag{13}$$

şeklinde bulunur. (11) denklemindeki eşitliklere dikkat edilirse hesaplanması gereken dört tane katsayı vardır. Bu katsayıları içeren dört bilinmeyenli dört denklemden oluşan bir denklem sistemi kurulmalıdır. Bunun için (8) ile verilen denklemin biraz düzenlenmesi gerekir.

$$\int_0^1 R(x)\frac{\partial\tilde{y}(x)}{\partial C_i}dx=0 \qquad i=2,3,4,5 \tag{14}$$

Denklem (14) oluşturulurken problemde verilen sınır şartları integralin sınırlarına yazılmıştır. i indisinin 2 den başlama nedeni ise yaklaşık çözümün (12) denklemindeki gibi yazılmasıdır. (14) nolu denklemde kullanılacak katsayılara göre kısmı türevler ise

$$W_2=\frac{\partial\tilde{y}(x)}{\partial C_2}=(-x+x^2) \qquad W_4=\frac{\partial\tilde{y}(x)}{\partial C_4}=(-x+x^4)$$
$$W_3=\frac{\partial\tilde{y}(x)}{\partial C_3}=(-x+x^3) \qquad W_5=\frac{\partial\tilde{y}(x)}{\partial C_5}=(-x+x^5) \tag{15}$$

olmaktadır. (15) teki bulunan bu ifadeler ve (13) ile verilen kalan, denklem (14) te yazılarsa katsayıları verecek denklem sistemi

$$\begin{aligned} -0.367C_2 - 0.55C_3 - 0.659C_4 - \ 0.732C_5 &= \ 0.083 \\ -0.55C_2 - 0.876C_3 - 1.091C_4 - \ 1.245C_5 &= \ 0.133 \\ -0.659C_2 - 1.092C_3 - 1.397C_4 - 1.623C_5 &= \ 0.167 \\ -0.732C_2 - 1.245C_3 - 1.623C_4 - 1.916C_5 &= \ 0.190 \end{aligned} \tag{16}$$

şeklinde bulunacaktır. (16) ile verilen denklem sistemi çözülürse aranan katsayılar

$$\begin{aligned} C_2 &= -0.000192 \quad C_3 = 0.142658 \\ C_4 &= -0.001484 \quad C_5 = 0.008087 \end{aligned} \tag{17}$$

olarak bulunur. (17) deki bu değerler önce (11) de ve ardından (10) da yazılırsa, (9) ile verilen diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x) = \ 0.850931x - 0.000192x^2 + 0.142658x^3 - 0.001484x^4 + 0.008087x^5 \tag{18}$$

olacaktır. Bu problemin çözümünde 5. dereceden bir polinom kullanılmıştır. Eğer problemin yaklaşık çözümü için 10. dereceden bir polinom kullanılırsa yaklaşık çözüm

$$\tilde{y}(x) = 0.850918x + 0.14182x^3 + 0.007090x^5 + 0.000168x^7 \tag{19}$$

olarak bulunur. Galerkin yöntemi değişken katsayılı diferansiyel denklemlere de uygulanabilir.

$$\begin{aligned} &y''(x) - \frac{1}{x}y'(x) + y = 4 - 9x + x^2 - x^3 \\ &y(0) = 0 \ , \ y(1) = 1 \end{aligned} \tag{20}$$

İkinci mertebeden tekil sınır değer problemlerinden birisi olan bu problem farklı araştırmacılar tarafından çeşitli yöntemlere çözülmüştür (Cui vd., 2007; Bataineh vd., 2013; Anakira vd., 2013). Bu tarz diferansiyel denklemlere birçok uygulamalı matematik ve fizik probleminde rastlanır (Allouche vd., 2017). Denklem (20) ile verilen problemin analitik çözümü $y(x) = x^2\text{-}x^3$ şeklindedir. Galerkin çözümü için öncelikle

$$\tilde{y}(x) = \sum_{n=0}^{5} C_n x^n \tag{21}$$

formunda bir yaklaşık çözüm varsayılır. (20) de verilen iki sınır şartının bu yaklaşık çözüme uygulanması durumunda (21) deki polinomun katsayıları arasında

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= -C_2 - C_3 - C_4 - C_5 \end{aligned} \tag{22}$$

eşitliklerine ulaşılacaktır. O halde yaklaşık çözüm

$$\tilde{y}(x) = \left(-C_2 - C_3 - C_4 - C_5\right)x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 \tag{23}$$

olarak yazılabilir. (23) de bulunan ifade diferansiyel denklemde yazılarsa kalan

$$\begin{aligned} R(x) = -4. + 9x - x^2 + x^3 + \left(4 - \frac{1.}{x} - 1.x + x^2\right)C_2 + \left(-\frac{1.}{x} + 8.x + x^3\right)C_3 \\ + \left(-\frac{1.}{x} - 1.x + 16x^2 + x^4\right)C_4 + \left(-\frac{1.}{x} - 1.x + 25x^3 + x^5\right)C_5 \end{aligned} \tag{24}$$

olur. Bu problem için yaklaşık çözümün katsayılara göre türevleri hesaplanmalı ve ardından (14) ile verilen integralde yazılarak işlem yapılmalıdır. Her iki problemde de integral sınırları aynıdır. Bahsedilen işlem adımları uygulanırsa bilinmeyen dört adet katsayıyı içeren denklem sistemi

$$\begin{aligned} 0.133C_2 + 0.199C_3 + 0.240C_4 + 0.267C_5 &= -0.067 \\ 0.283C_2 + 0.457C_3 + 0.575C_4 + 0.660C_5 &= -0.173 \\ 0.390C_2 + 0.658C_3 + 0.853C_4 + 1.001C_5 &= -0.267 \\ 0.467C_2 + 0.812C_3 + 1.076C_4 + 1.283C_5 &= -0.344 \end{aligned} \tag{25}$$

olarak bulunur. Bu denklem sisteminin çözümüne göre katsayılardan $C_2 = 1$ ve $C_3 = -1$ iken geriye kalanlar ise sıfırdır. Bu katsayılar (23) de yerine yazılırsa (20) ile verilen diferansiyel denklemin Galerkin yöntemiyle yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x) = x^2 - x^3 \tag{26}$$

şeklinde olur. Galerkin yöntemi ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin yanı sıra yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemlere de uygulanabilir. Aşağıda verilen denkleme Galerkin yöntemi ilk iki örnekteki gibi uygulanabilir.

$$\begin{aligned} &y^{(5)}(x) = y - 15e^x - 10xe^x, \qquad 0 < x < 1 \\ &y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad y''(0) = 0 \quad y(1) = 0 \quad y'(1) = -e \end{aligned} \tag{27}$$

Bu problem sınır şartlarında birinci ve ikinci türevleri barındırması sebebiyle birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Problemi inceleyen araştırmacılardan bazılarına örnek olarak (Khan, 1994; Çağlar vd., 1999; Wazwaz, 2001; Erturk vd., 2008) verilebilir. Problemde beş tane sınır şartı olduğundan yaklaşık çözümün en az altı terimli olacağını göz önüne almak gerekir. (27) ile verilen diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 \tag{28}$$

olsun. Bu çözüme denklem (27) deki sınır şartları uygulanarak, (28) deki katsayılar arasında

$$C_0 = 0\ ,\ C_1 = 1\ ,\ C_2 = 0$$
$$C_3 = -0.281 + C_5 \quad C_4 = -0.718 - 2.C_5 \tag{29}$$

eşitliklerine ulaşılır. O halde diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü

$$\tilde{y}(x) = x + \left(-0.281 + C_5\right)x^3 + \left(-0.718 - 2C_5\right)x^4 + C_5x^5 \tag{30}$$

şeklindedir. (30) ile verilen bu çözüm diferansiyel denklemde yerine yazılarak kalan

$$R(x) = 15\mathrm{e}^x - x + 10\mathrm{e}^x x - x^4\left(-0.718 - 2C_5\right) + 120C_5 - x^5C_5 - x^3\left(-0.281 + C_5\right) \tag{31}$$

olarak bulunacaktır. C_5 katsayısı hesaplanırsa Galerkin çözümünde yer alan bütün katsayılar bulunmuş olacaktır. Bunun için

$$\int_0^1 R(x)\frac{\partial\tilde{y}(x)}{\partial C_5}dx = 0 \tag{32}$$

eşitliğinden faydalanılır. Bu integral alınırsa C_5 = -0.311693 şeklinde bulunur. Bu değer denklem (30) da yerine yazılırsa (27) ile verilen diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü

$$y_5(x) = x - 0.593412x^3 - 0.0948938x^4 - 0.311694x^5 \tag{33}$$

olarak verecektir. (33) denkleminin sol tarafındaki alt indis yaklaşık çözüm için en fazla kaçıncı dereceden bir polinomun kullanıldığını göstermektedir. Yaklaşık çözüm için seçilen polinomun derecesi arttırılarak aynı problem için farklı yaklaşık çözümler bulunabilir. Örneğin altıncı dereceden polinom kullanılması halinde yaklaşık çözüm

$$y_6(x) = x - 0.485785x^3 - 0.385478x^4 - 0.0534075x^5 - 0.0753296x^6 \tag{34}$$

şeklinde bulunur.

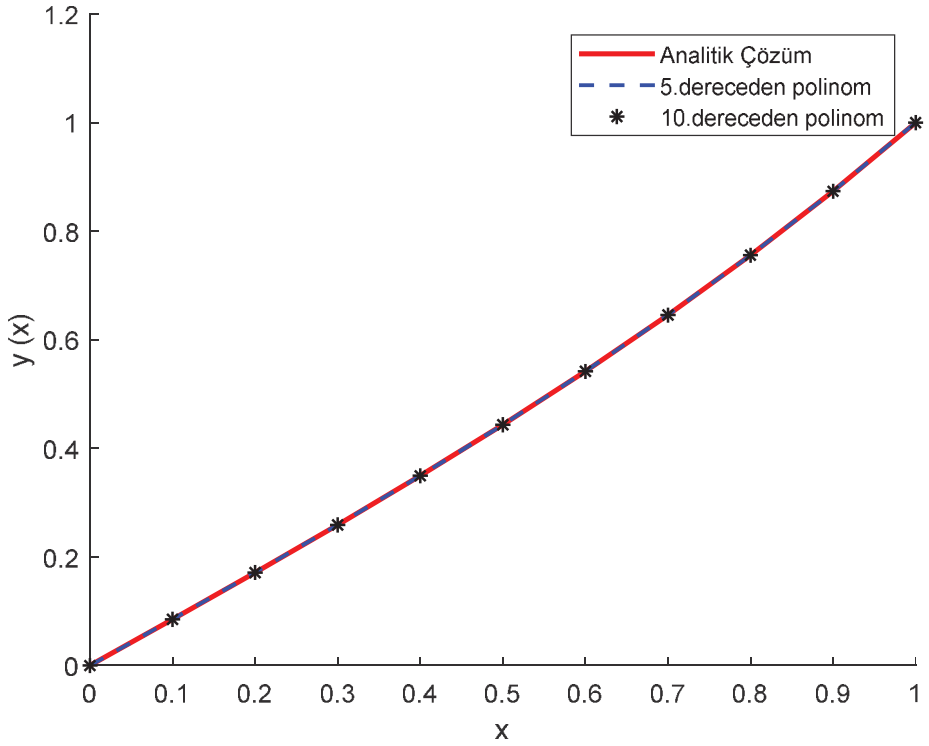
3. BULGULAR

(9) ile verilen problemin Analitik, Galerkin ve Sonlu Farklar yöntemi çözümlerinin farklı x değerleri için aldıkları değerler Tablo 1. de verilmiştir. Virgülden sonra en fazla dokuz basamak tablolanmıştır. Bu problemin birinci yaklaşık çözümünde sadece C_0 katsayısı sıfır iken ikinci yaklaşık çözümde çift dereceli kuvvetlerin katsayıları sıfır olmaktadır.

Tablo 1. Sabit katsayılı Lineer Diferansiyel denklemin çözümlerinin karşılaştırılması

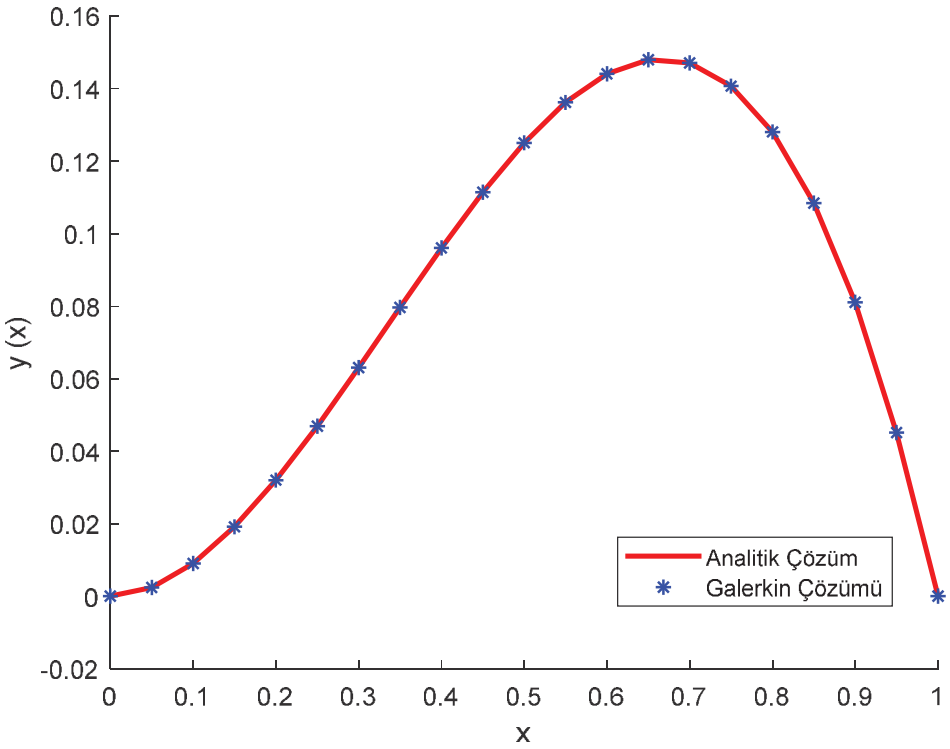
x değeri	Analitik Çözüm	Sonlu Farklar [Referans Çavuşoğlu (2017)]] TarTM	5.dereceden polinom Galerkin Çözümü	10.dereceden polinom Galerkin Çözümü	5.derece polinomda Mutlak Hata	10. derece polinomda Mutlak Hata
0.0	0.000000	0.000000	0.000000000	0.000000000	0.00000	0.00000
0.1	0.085233	0.085234	0.085233866	0.085233690	1.63e-07	1.25e-08
0.2	0.171320	0.171320	0.171320180	0.171320431	2.73e-07	2.31e-08
0.3	0.259121	0.259122	0.259121676	0.259121808	1.61e-07	3.00e-08
0.4	0.349516	0.349517	0.349516932	0.349516568	3.32e-07	3.12e-08
0.5	0.443409	0.443409	0.443410078	0.443409416	6.36e-07	2.51e-08
0.6	0.541740	0.541740	0.541740498	0.541740064	4.24e-07	9.64e-09
0.7	0.645492	0.645493	0.645492539	0.645492640	8.45e-08	1.68e-08
0.8	0.755705	0.755705	0.755705207	0.755705536	2.72e-07	5.61e-08
0.9	0.873481	0.873482	0.873481883	0.873481800	1.92e-07	1.09e-07
1.0	1.000000	1.000000	1.000000018	1.000000179	1.80e-08	1.79e-07

Şekil 1 de Analitik çözüm ve Galerkin çözümünün konumla değişimi grafik olarak verilmiştir.



Şekil 1. Sabit katsayılı nonlineer homojen diferansiyel denklemin Analitik çözümü ve Galerkin yaklaşık çözümleri.

İncelenen ikinci problemde (26) ile verilen yaklaşık çözüm bu problemin analitik çözümü ile aynı çıkmaktadır. Şekil 2 de Analitik çözüm ile Galerkin çözümü grafik halinde gösterilmiştir.



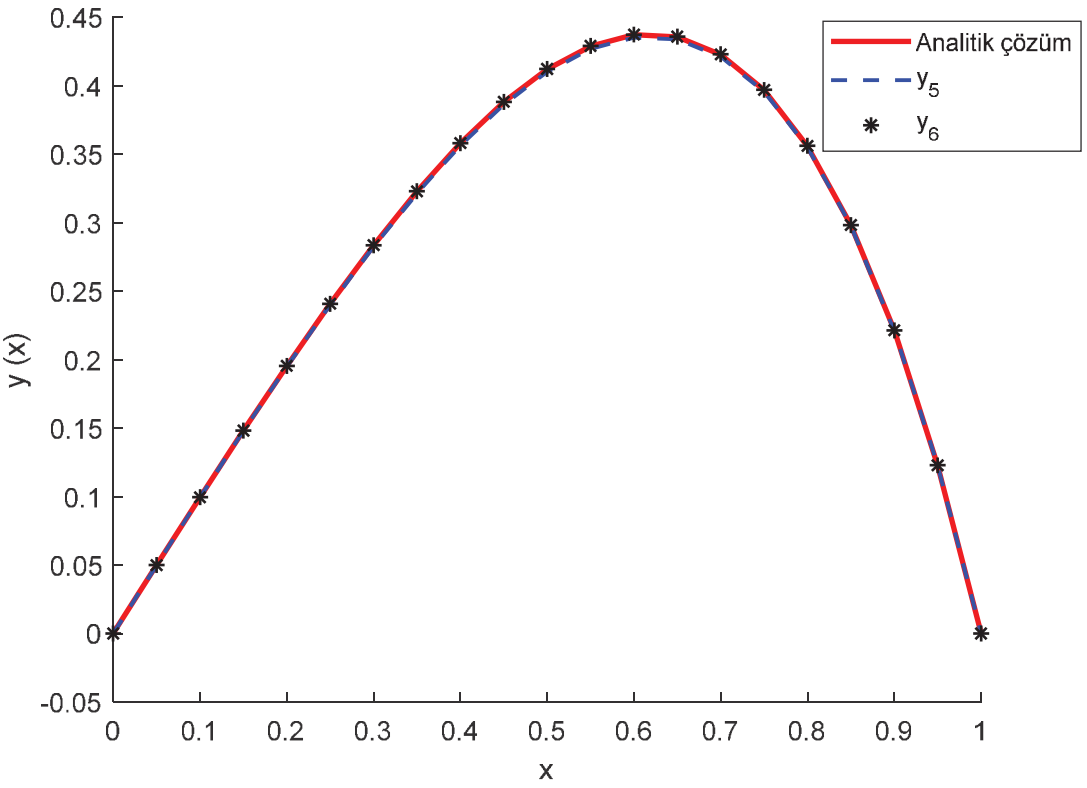
Şekil 2. Değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklemin Analitik çözümü ve Galerkin çözümü

Tablo 2 ile Analitik, OHAM (Optimal Homotopy Asymptotic Method) ve Galerkin çözümlerinin değerleri ve Galerkin çözümündeki mutlak hata değerleri nokta bazında gösterilmiştir.

Tablo 2. Değişken katsayılı diferansiyel denklemin çözümlerinin karşılaştırılması

x değeri	**Analitik Çözüm**	**OHAM Çözümü [Referans** Anakira, vd. (2013)**]**	**Galerkin Çözümü**	**Mutlak Hata**
0.1	0.009	0.0089895718978	0.0089999999999975	2.48e-15
0.2	0.032	0.0319909691543	0.0320000000000010	9.97e-16
0.3	0.063	0.0629929391328	0.0630000000000036	3.64e-15
0.4	0.096	0.0959950247523	0.0960000000000032	3.16e-15
0.5	0.125	0.1249967655986	0.1250000000000002	2.98e-16
0.6	0.144	0.1439978797237	0.1439999999999973	2.69e-15
0.7	0.147	0.1469984038747	0.1469999999999965	3.48e-15
0.8	0.128	0.1279987010935	0.1279999999999987	1.19e-15
0.9	0.081	0.0809992354577	0.0810000000000021	2.12e-15

Denklem (27) de sınır şartlarıyla verilen beşinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan problem için bulunan yaklaşık çözümler, analitik çözüm ile Şekil 3 te karşılaştırılmıştır.



Şekil 3. Yüksek mertebeden lineer homojen olmayan diferansiyel denklemin Analitik çözümü ve Galerkin çözümleri

N terimi Galerkin yönteminde deneme fonksiyonu olarak seçilen polinomun en yüksek derecesini göstermek üzere Tablo 3 ile bu probleme ait farklı yaklaşık çözümlerin mutlak hata değerleri verilmiştir.

Tablo 3. Beşinci mertebeden denklemin yaklaşık çözümlerinde nokta bazında yapılan mutlak hata

x değeri	**Analitik Çözüm**	**B-spline yönteminde Hata [Referans** Çağlar vd. (1999)**]**	**N = 5 için Mutlak Hata** $\lvert y_{analitik} - y_5 \rvert$ **TarTM**	**N = 6 için Mutlak Hata** $\lvert y_{analitik} - y_6 \rvert$	**N = 7 için Mutlak Hata** $\lvert y_{analitik} - y_7 \rvert$	**N = 8 için Mutlak Hata** $\lvert y_{analitik} - y_8 \rvert$	**N = 9 için Mutlak hata** $\lvert y_{analitik} - y_9 \rvert$
0.0	0.0000	0.000	0.0000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.0994	-0.008	7.1e-05	9.67e-06	8.12e-07	4.92e-08	2.08e-09
0.2	0.1954	-0.012	0.00042	5.06e-05	3.67e-06	1.91e-07	7.50e-09
0.3	0.2834	-0.005	0.00101	0.00010	6.73e-06	3.16e-07	1.48e-08
0.4	0.3580	0.003	0.00163	0.00014	8.40e-06	3.88e-07	2.84e-08
0.5	0.4121	0.008	0.00202	0.00015	8.53e-06	4.20e-07	5.40e-08
0.6	0.4373	0.006	0.00202	0.00013	7.66e-06	3.96e-07	9.95e-08
0.7	0.4228	0.000	0.00159	9.5e-05	6.10e-06	2.88e-07	1.78e-07
0.8	0.3560	0.009	0.00091	5.1e-05	3.82e-06	1.02e-07	3.09e-07
0.9	0.2213	-0.009	0.00027	1.65e-05	1.24e-06	1.04e-07	5.16e-07
1.0	0.0000	0.000	1.9e-07	1.00e-07	9.99e-08	2.90e-07	8.28e-07

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Çalışmada incelenen birinci problemin kesin çözümü üstel terimler içermektedir. Problemin çözümüne polinomlarla yapılan yaklaşımdaki mutlak hata değeri, sonlu farklar yöntemi (Çavuşoğlu, 2017) kullanılması durumunda yapılan hatadan daha az olmaktadır. Galerkin yöntemi uygulanırken seçilen polinomun derecesinin arttırılması mutlak hatayı azaltmaktadır. İncelenen ikinci örnek tekil iki noktalı sınır değer problemdir. Denklemin sağ tarafında yer alan ve homojenliği bozan terimin polinom olması sayesinde Galerkin yöntemi doğrudan analitik çözümü vermiştir. Değişken katsayılı olan bu mevcut problemin yaklaşık çözümünün bulunması için deneme fonksiyonu olarak beşinci dereceden bir polinomun kullanılması yeterli olmuştur. Beşinci mertebeden ve homojen olmayan üçüncü problemin yaklaşık çözümünde yapılan nokta bazındaki mutlak hata değerleri B-spline yöntemiyle (Çağlar vd., 1999) bulunan değerlerden daha düşüktür. Tablo 3 incelendiğinde Galerkin çözümünde kullanılan deneme fonksiyonun derecesi arttıkça mutlak hata değeri birinci problemde olduğu gibi azalmaktadır.

Galerkin yönteminin avantajları arasında deneme fonksiyonlarını seçmekte serbest olunması, yaklaşık çözümü elde etmek için herhangi bir dönüşüm yöntemine ihtiyaç duyulmaması, her mertebeden diferansiyel denkleme uygulanabilmesi vardır. Diferansiyel denklemlerin çözümünü bir cebrik denklem sisteminin çözümüne indirgeme şansı veren Galerkin yöntemi ilerleyen çalışmalarda diferansiyel denklem sistemlerinin, kesirli diferansiyel denklemlerin, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılabilir.

KAYNAKLAR

Allouche, H. and Tazdayte, A. (2017). Numerical solution of singular boundary value problems with logarithmic singularities by Padé approximation and collocation methods. Journal of Computational and Applied Mathematics, 311(2017), 324-341. https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.08.003

Anakira, N. R., Alomari, A. K. and Hashim, I. (2013). Numerical scheme for solving singular two-point boundary value problems. Journal of Applied Mathematics, Volume 2013, Article ID 468909. https://doi.org/10.1155/2013/468909

Bakioğlu, M. (2011). Sayısal Analiz (2.Baskı). İstanbul: Birsen Yayınevi

Bataineh, A. S., Alomari, A. K. and Hashim, I. (2013). Approximate solutions of singular two-point bvps using legendre operational matrix of differentiation. Journal of Applied Mathematics, Volume 2013, Article ID 547502. https://doi.org/10.1155/2013/547502

Chakraverty, S., Mahato, N. R., Karunakar, P. and Rao T. D. (2019). Advanced Numerical and Semi-Analytical Methods for Differential Equations (1st ed.). USA: John Wiley & Sons, Inc.

Cui, M. and Geng, F. (2007). Solving singular two-point boundary value problem in reproducing kernel space. Journal of Computational and Applied Mathematics, 205 (1), 6-15. https://doi:10.1016/j.cam.2006.04.037

Çağlar, H. N., Çağlar, S. H. and Twizell, E. H. (1999). Numerical solution of fifth-order boundary value problems with sixth-degree B-spline functions. Applied Mathematics Letter, 12 (5), 25-30. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(99)00052-X

Çavuşoğlu, S. (2017). Bazı sınır değer problemleri ve yaklaşım yöntemleri. Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat.

Ertürk, V. S. and Momani, S. (2008). Differential transform technique for solving fifth-order boundary value problems. Mathematical and Computational Applications, 13 (2), 113-121. https://doi.org/10.3390/mca13020113

Khan M.S. (1994). Finite-difference solutions of fifth-order boundary-values problems. Ph.D. Thesis, Brunel University, England.

Wazwaz, A. M. (2001). The numerical solution of fifth-order boundary value problems by the decomposition method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 136 (1-2), 259–270. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00618-X