Kollokasyon Yöntemiyle Bagley-Torvik Denklemi Sayısal Çözümleri

Öğr.Gör. Dr. Birkan DURAK[1]

Öğr.Gör. Dr. İbrahim Tamer EMECAN[2]

[1] İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, Uçak Teknolojisi Programı, birkand@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0002-8196-5407
[2] İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, Sualtı Teknolojisi Programı, emecan@iuc.edu.tr, ORCID No: 0000-0002-4312-7947
*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Birkan DURAK, birkand@iuc.edu.tr

ÖZET

Kesirli türeve sahip olan denklemlerin kurulması ve çözülmesi uzun zamandan beri bir çok matematikçi ve mühendisin ilgisini çekmiştir. Doğa olaylarının modellenmelerinde lineer denklemlerden ziyade lineer olmayan ya da kesir türevler içeren denklemleri kullanma fikri oldukça rağbet görmektedir. Bu nedenle bir çok araştırmacının katkısının sonucu olarak kesirli türev ve integral konusunda gittikçe artan bir literatür mevcuttur.

Son yıllardaki çalışmalar incelendiğinde mühendislikteki matematiksel modellerin kesir türevleri içeren diferansiyel denklemleri içerdiği görülmektedir. Kesirli türevleri içeren denklemlere jeoloji ve jeofizik, kontrol teorisi, malzeme bilimi, biyolojide vb. alanlarda rastlamak mümkündür. İlk defa Bagley tarafından tanıtılan Bagley-Torvik denklemi kesir türevli denklemlerin özel bir halidir ve Newtonyen bir sıvıya batırılmış katı plakaların hareketinin modellenmesinde kullanılanılır. Farklı araştırmacılar çeşitli dönemlerde bu denklemin çözümünü analitik veya sayısal yöntemlerle bulmaya çalışmışlardır.

Mevcut çalışmada öncelikle kollokasyon yöntemi Bagley-Torvik diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümünü bulmaka amacıyla düzenlenmiştir. Çeşitli yayınlardan seçilen problemlerin yaklaşık çözümleri bu yöntemle bulunmuştur. Kesir türevli bir denklemin çözümü yöntem kullanarak bir denklem sisteminin çözümünü bulmaya dönüştürülmüştür.

Yaklaşık çözümün polinom kabul edilmesi kollokasyon yöntemi uygulanmasında hesaplama kolaylığı sağlamıştır. Sınır şartları katsayıları birbiri türünden yazmayı sağlar ve böylece hesaplanacak olan katsayı miktarını azalır. İncelenen bazı problemlerin kesin çözümlerini bu yöntemle vermiştir. Bu yöntem daha sonraki çalışmalarda çeşitli türdeki kesir türevli denklemlere uygulanabilecek basit bir yöntemdir.

Anahtar Kelimeler – Kollokasyon, Bagley-Torvik, Yaklaşık Çözüm, Kesir Türevli Denklem, Sayısal Analiz

GİRİŞ

Mühendislik problemlerinin incelenmesinde matematiksel modellerden ve onların uygun ifadeleri olan diferansiyel denklemlerden yararlanılır. Son yıllardaki çalışmalarda diferansiyel denklemlerin mertebelerinin kesirli sayılar kabul edilerek daha geniş bir denklem grubu ile gerçeğe daha yakın modellemelerin kurulmaya çalışıldığı görülmektedir. Kesirli türevleri içeren denklemler, jeoloji ve jeofizikte kayaçların özelliklerinin tanımlanmasında, dinamik sistemlerin kontrol teorisindeki dinamik sistem modellemesinde, malzeme biliminde mekanik ve elektriksel özelliklerin incelenmesinde, biyolojide, ısı ve elektrik ile ilgili olayların incelenmesinde kullanılmıştır (Ünlü, 2014).

Newtonyen bir sıvıya batırılmış katı plakaların hareketinin modellenmesinde Bagley-Torvik denklemiyle karşılaşılır. Bu denklem ilk olarak Bagley tarafından teklif edilmiştir. Podlubny ve Trinks tarafından bu denklem incelenmiştir (Çenesiz, 2007). Daha sonra farklı araştırmacılar tarafından Bagley-Torvik denklemi çeşitli alanlara uygulanmıştır.

.

1- Kollokasyon Yöntemi

L lineer ve D ise bir diferansiyel operatör olmak üzere bir kesir türevli denklem

$$Ly(x) = a_0 y(x)'' + a_1 D^{\frac{3}{2}} y(x) + a_2 y(x) \tag{1}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer denklem (1) de

$$\begin{aligned} &Ly(x) = h(x) \\ &y(x_1) = b_1 \\ &y(x_2) = b_2 \end{aligned} \tag{2}$$

alınırsa sınır şartlarıyla verilen bir Bagley-Torvik diferansiyel denklemi yazılmış olur. Burada $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, x_1, x_2$ reel sayı olmakatadır. Denklem (2) ile verilen denklemin yaklaşık çözümü

$$y^* = \sum_{n=1}^{N} C_n x^n \tag{3}$$

şeklinde bir polinom kabul edilsin. Denklem (3), denklem (1) de yerine yazılırsa ve denklem (2) deki tanımlamalara dikkat edilirse

$$\begin{aligned} &y^{*\prime\prime} + D^{\frac{3}{2}} y^*(x) + y^*(x) \\ &y(x_1) = b_1 \\ &y(x_2) = b_2 \end{aligned} \tag{4}$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemde $a_0, a_1, a_2 = 1$ kabul edilmiştir. Denklem (4) ün açık hali

$$R(x) = \left(\sum_{n=1}^{N} C_n x^n\right)'' + D^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N} C_n x^n\right) + \sum_{n=1}^{N} C_n x^n - h(x) \tag{5}$$

Burada N yaklaşık çözüm için seçilen polinomun en yüksek derecesini göstermektedir. Bu denklemdeki bilinmeyen $C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$ katsayılarının hesaplanması için denklem (2) deki sınır şartlarından ve denklem (5) deki $R(x)$ ile gösterilen kalanın kollokasyon noktası olarak adlandırılan noktalarda sıfıra eşitlenmesinden yararlanılmalıdır.

Sınır şartları katsayıları birbiri cinsinden yazmayı sağlayarak hesaplanacak olan katsayı miktarını azaltır. Sıfıra eşitleme sayesinde ise bir denklem sistemi

meydana gelmektedir. Böylece denklem (1) ile verilen kesir türevli denklemin çözümü denklem (5) ile tanımlanan denklem sisteminin çözümüne indirgenmiş olur. O halde

$$R(x_i) = (\sum_{n=1}^{N} C_n x_i^n)'' + D^{\frac{3}{2}}(\sum_{n=1}^{N} C_n x_i^n) + \sum_{n=1}^{N} C_n x_i^n - h(x_i) = 0 \quad (6)$$

ifadesi denklem sisteminin kapalı formdaki gösterimidir. Bu denklemde $i = 1,2,3,\dots,N$ dir. Bu sistemi $N = 2$ için

$$(C_1 x + C_2 x^2)'' + D^{\frac{3}{2}}[C_1 x + C_2 x^2] + (C_1 x + C_2 x^2) = h(x) \quad (7)$$

den

$$2C_2 + D^{\frac{3}{2}}\left[C_1 x_i + C_2 x_i^2\right] + \left(C_1 x_i + C_2 x_i^2\right) = h(x_i) \qquad i = 1,2 \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (8) e göre bilinmeyen katsayılar olan C_1 ve C_2 yi verecek olan denklemler ise

$$2C_2 + D^{\frac{3}{2}}[C_1 x_1 + C_2 x_1^2] + (C_1 x_1 + C_2 x_1^2) = h(x_1) \quad (9)$$

$$2C_2 + D^{\frac{3}{2}}[C_1 x_2 + C_2 x_2^2] + (C_1 x_2 + C_2 x_2^2) = h(x_2) \quad (10)$$

olmaktadır. Denklem (9) ve (10) daki x_1, x_2 değerleri kollokasyon noktalarıdır, bunlar denklem (2)'ye dikkat edilerek

$$x_i = \frac{i(x_2 - x_1)}{(i+1)} \quad (11)$$

formülü ile hesaplanır.

Denklem (11) deki kollokasyon noktalarından yararlanılarak (6) ile verilen denklem sistemi kurulur ve çözülürse denklem (3) deki yaklaşık çözümdeki bilinmeyen katsayılar hesaplanmış ve böylece denklem (1)' deki problemin kollokasyon çözümü tamamlanmış olur.

2- Kollokasyon Yönteminin Bagley-Torvik Denklemlerine Uygulanması

Bu bölümde kollokasyon yöntemi çeşitli başlangıç ve sınır değer problemi şeklinde verilmiş olan kesir türevli denklemlerin yaklaşık çözmünü bulmakta kullanılacaktır. Her bir problemin yaklaşık çözümü polinom olarak kabul edilmiştir. Birinci problem olarak aşağıda sınır şartlarıyla verilen denklemi göz önüne alalım (Yadav vd., 2024).

$$y''+y^{3/2}+y=(1+x)$$
$$y(0)=1 \qquad y(1)=2 \tag{12}$$

Problemin çözümü $1+x$ dir. Bu problemin polinom şeklindeki yaklaşık çözümü

$$y=\sum_{n=0}^{2} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 \tag{13}$$

olarak kabul edilirse. Yöntemde kullanılacak olan kalan bu çözümün denklem (12) ile verilen kesir türevli denklemde yerine yazılmasıyla bulunacaktır. Buna göre kalan

$$R(x) = -1 - x + C_0 + xC_1 + 2C_2 + x^2 C_2 + \frac{-2C_0+4x(C_1+4xC_2)}{4\sqrt{\pi}x^{3/2}} \tag{14}$$

şeklindedir. (12) denklemindeki ilk sınır şartına göre $C_0 = 1$ bulunur. Yaklaşık çözümdeki C_1 ve C_2 katsayılarının bulunması için ikinci sınır şartı ve bir kollokasyon noktası ($x = 1/2$) kullanılarak kalan bu nokta için sıfıra eşitlenmelidir. Buna göre aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$C_1 + C_2 = 1 \tag{15}$$

$$\frac{C_1}{2} + \frac{9C_2}{4} + \frac{-2+2(C_1+2C_2)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} \tag{16}$$

Bu iki denklemin çözülmesiyle denklem (13) deki aranan iki katsayısı sırasıyla $C_1 = 1$ ve $C_2 = 0$ olacaktır. Bulunan bu katsayılar (13) denklemine yazılarsa aranan çözüm $y = 1 + x$ dir. Bu çözüm, problemin kesin çözümüdür. Kollakasyon yöntemiyle incelenen ilk problemin kesin çözümü bulunabilmiştir. Mevcut problemin yaklaşık çözümünün elde edilmesi için sadece bir tane kollokasyon noktasının kullanılması yeterli olmuştur.

İkinci test problemi aşağıdaki başlangıç değer şartlarına sahip olan denklem olsun (Verma ve Kumar, 2021)

$$y''+y^{3/2}+y=\frac{15}{4}\sqrt{x}+\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\,x+x^2\sqrt{x}$$
$$y(0)=0 \qquad y'(0)=0 \tag{17}$$

Problemin kesin çözümü $x^2\sqrt{x}$ dir. Yaklaşık çözümü altıncı dereceden bir polinom olarak

$$y(x)=\sum_{n=0}^{6}C_n x^n \tag{18}$$

şeklinde kabul edelim. Başlangıç değerlere dikkat edilirse $C_0 = 0$ ve $C_1 = 0$ olduğundan bu yaklaşık çözüm aşağıdaki gibidir.

$$y(x)=\sum_{n=2}^{6}C_n x^n \tag{19}$$

Denklem (19) deki çözüm denklem (17) da yerine yazılırsa kalan

$$R(x) = -\frac{15\sqrt{x}}{4} - \frac{15\sqrt{\pi}x}{8} - x^{5/2} + 2C_2 + x^2C_2 + 6xC_3 + x^3C_3 + 12x^2C_4 + x^4C_4 + 20x^3C_5 + x^5C_5 + 30x^4C_6 + x^6C_6 + \frac{4\sqrt{x}(105C_2+6x(35C_3+8x(7C_4+10xC_5))+640x^4C_6)}{105\sqrt{\pi}} \tag{20}$$

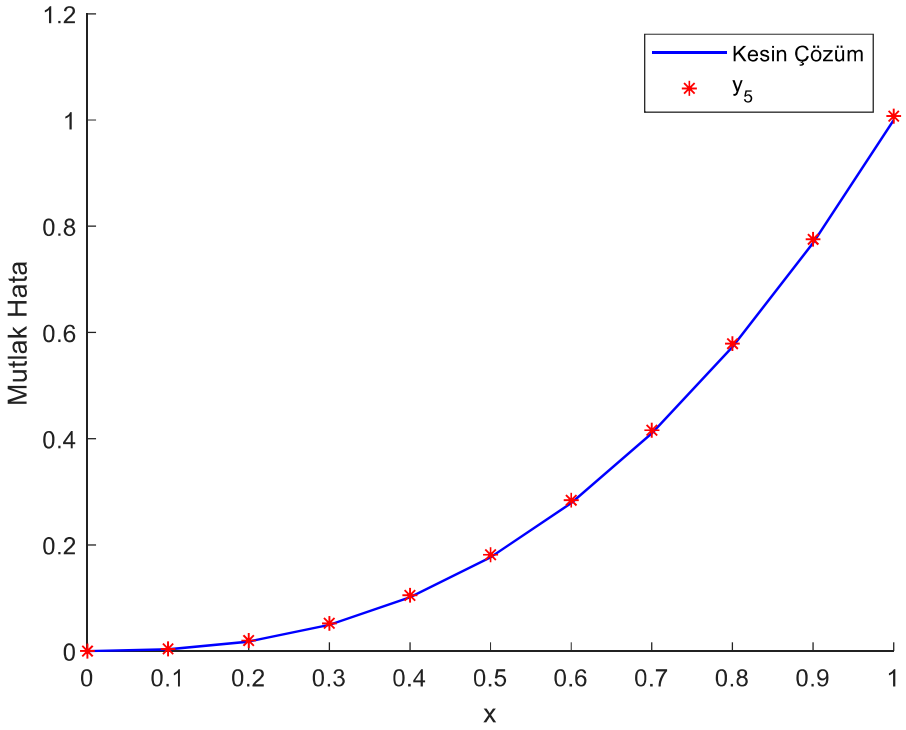
Denklem (19) deki bilinmeyen katsayılar olan C_2, C_3, C_4, C_5 ve C_6 'yı bulmak için beş adet denkleme ihtiyaç vardır. Bu denklemler (20) daki kalanı beş tane kollokasyon noktasında sıfıra eşitleyerek kurulmalıdır. Problemin değişkeni olan x'in [0-1] aralığında değiştiği kabul edilirse kollokasyon noktaları sırasıyla $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{2}{6}$, $x_3 = \frac{3}{6}$, $x_4 = \frac{4}{6}$ ve $x_5 = \frac{5}{6}$ dır. Bu değerler kullanılarak kalan her biri için ayrı ayrı sıfıra eşitlenirek ulaşılan beş bilinmeyenli beş denklem çözülerek katsayılar

$$C_2 = 0.2979, C_3 = 1.1129, C_4 = -0.6739, C_5 = 0.3588, C_6 = -0.0885$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar denklem (19) de yerine yazılırsa yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y_5(x) = -0.088x^6 + 0.3588x^5 - 0.6739x^4 + 1.1129x^3 + 0.2979x^2 \tag{21}$$

Şekil 1 de beş kollokasyon noktasıyla bulunan yaklaşık çözüm ve analitik çözüm grafik halinde verilmiştir.



Şekil 1: İkinci problem için kesin ve yaklaşık çözümler

Tablo 1 de sırasıyla N kollokasyon nokta sayısı olmak üzere N= 5,10 ve 15 değerleri için bulunan yaklaşık çözümlerde yapılan mutlak hatalar görülmektedir.

Tablo 1: Farklı kollokasyon noktalarında ikinci problem için yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar

x	Mutlak Hatalar		
	N=5	N=10	N=15
0.0	0.000000	0.000000	0.0000000
0.1	$8.66\text{x}10^{-4}$	$2.82\text{x}10^{-4}$	$1.39\text{x}10^{-4}$
0.2	$1.96\text{x}10^{-3}$	$5.62\text{x}10^{-4}$	$2.68\text{x}10^{-4}$
0.3	$2.92\text{x}10^{-3}$	$8.10\text{x}10^{-4}$	$3.83\text{x}10^{-4}$
0.4	$3.77\text{x}10^{-3}$	$1.03\text{x}10^{-3}$	$4.86\text{x}10^{-4}$
0.5	$4.54\text{x}10^{-3}$	$1.23\text{x}10^{-3}$	$5.80\text{x}10^{-4}$
0.6	$5.25\text{x}10^{-3}$	$1.41\text{x}10^{-3}$	$6.64\text{x}10^{-4}$
0.7	$5.87\text{x}10^{-3}$	$1.58\text{x}10^{-3}$	$7.40\text{x}10^{-4}$
0.8	$6.44\text{x}10^{-3}$	$1.72\text{x}10^{-3}$	$8.08\text{x}10^{-4}$
0.9	$6.95\text{x}10^{-3}$	$1.85\text{x}10^{-3}$	$8.68\text{x}10^{-4}$
1.0	$7.30\text{x}10^{-3}$	$1.97\text{x}10^{-3}$	$9.20\text{x}10^{-4}$

Üçüncü test problemi olarak aşağıdaki örneği inceleyelim(Verma ve Kumar, 2021).

$$y''+y^{3/2}+y=4\sqrt{\frac{x}{\pi}}+x^2+2 \qquad (22)$$
$$y(0)=0 \qquad y'(0)=0$$

Problemin kesin çözümü x^2 dir. Yaklaşık çözüm

$$y(x)=\sum_{n=0}^{6}C_n x^n \qquad (23)$$

olsun. Başlangıç şartları dikkate alınırsa bu çözümün

$$y(x)=\sum_{n=2}^{6}C_n x^n \qquad (24)$$

Denklem (24) ile verilen bu çözüm denklem (22) de yerine yazılırsa bu problem için kalan

$$\begin{aligned}R(x)=&-2-2.256\sqrt{x}-1.x^2+2.C_2+x^2C_2+6.xC_3+x^3C_3\\&+12.x^2C_4+x^4C_4+20.x^3C_5+x^5C_5\\&+0.0644\sqrt{x}(35.C_2+2.x(35.C_3+8.x(7.C_4+10.xC_5)\end{aligned} \qquad (25)$$

şekilde bulunur. Denklem (24) deki bilinmeyen C_2, C_3, C_3 ve C_4 katsayılarını verecek olan dört adet denklemin kapalı formu $R(x_n)=0$, $n=1,2,3,4$ şeklindedir. Bu dört denklem açık olarak denklem (26) teki gibidir.

$$2.04C_2+1.20C_3+0.48C_4+0.16C_5+0.028(35C_2+0.4(35C_3+1.6(7C_4+2C_5)))=3.049$$

$$2.16C_2+2.46C_3+1.94C_4+1.29C_5+0.04(35C_2+0.8(35C_3+3.2(7C_4+4C_5)))=3.58$$

$$2.36C_2+3.81C_3+4.44C_4+4.39C_5+0.04(35.C_2+1.2(35C_3+4.8(7C_4+6.C_5)))=4.10 \qquad (26)$$

$$2.64C_2+5.31C_3+8.08C_4+10.56C_5+0.05(35.C_2+1.6(35.C_3+6.4(7.C_4+8.C_5)))=4.65$$

Denklem (26) daki sistemin çözümüyle katsayılar sırasıyla $C_2=1, C_3=-1.57\times10^{-15}, C_4=1.71\times10^{-15}, C_5=-7.19\times10^{-16}$ olmaktadır. Buna göre yaklaşık çözüm $y(x)=x^2$ olarak bulunur.

Son problem olarak çözümü $y(x) = x^3 - x$ olan sınır değer problemini inceleyelim (Sakar vd., 2019).

$$y'' + y^{3/2} + y = x^3 + 5x + \frac{8x^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \qquad (27)$$
$$y(0) = 0 \qquad y(1) = 0$$

Bu probleme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{3} C_n x^n \qquad (28)$$

yaklaşık çözümü önerilsin. Sınır şartları dikkate alınırsa katsayılar arasında $C_0 = 0, C_1 = -C_2 - C_3$ bağıntıları geçerlidir. O halde yaklaşık çözüm

$$y(x) = C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

$$(-C_2 - C_3) * x + \sum_{n=2}^{3} C_n * x^n \qquad (29)$$

olacaktır. Bu problem için kalan ise

$$R(x) = -5.x - 4.5135x^{3/2} - 1.x^3 + 2.C_2 + x^2 C_2 + x(-1.C_2 - 1.C_3) + 6.xC_3 + x^3 C_3 + \frac{0.564((-1.+4.x)C_2 + (-1.+8.x^2)C_3)}{\sqrt{x}} \qquad (30)$$

şeklinde bulunur. Kollokasyon noktası olan $x_1 = \frac{1}{3}$ ve $x_2 = \frac{2}{3}$ alınırsa katsayıları verecek olan denklemler ise

$$2.11C_2 + 0.33(-1.C_2 - 1.C_3) + 0.97C_2 - 0.11C_3) + 2.03 = 2.57 \qquad (31)$$
$$-2.44C_2 + 0.66(-1.C_2 - 1.C_3) + 4.29C_3 + 0.69(1.66 + 2.55C_3) = 6.08$$

olur. Bu sistemin çözümü ile katsayılar bulunur ve denklem (28) ye yazılırsa bu problemin iki kollokasyon noktası kullanılmasıyla bulunan yaklaşık çözümü

$$y(x) = -1.4135498x + 0.624604756x^2 + 0.788945073357 \qquad (32)$$

olacaktır. Tablo 2 de bu yaklaşık çözüm için nokta bazında yapılan mutlak hatalar görülmektedir.

Tablo 2: Son problem için yaklaşık çözümde yapılan mutlak hatalar

x	Mutlak Hatalar
0.0	0.000000
0.1	$3.53\text{x}10^{-2}$
0.2	$5.94\text{x}10^{-2}$
0.3	$7.35\text{x}10^{-2}$
0.4	$7.89\text{x}10^{-2}$
0.5	$7.70\text{x}10^{-2}$
0.6	$6.88\text{x}10^{-2}$
0.7	$5.58\text{x}10^{-2}$
0.8	$3.98\text{x}10^{-2}$
0.9	$2.01\text{x}10^{-2}$
1.0	0.000000

SONUÇ

Kollokasyon yöntemi uygulanırken yaklaşık çözümü polinom kabul etmek hesaplama kolaylığı sağlamıştır. Sınır şartları katsayıları birbiri türünden yazmayı sağladığından hesaplanacak olan katsayı miktarını azalır. Üzerine çalışılan bazı problemlerin kesin çözümleri bu yöntemle bulunabilmiştir. Kollokasyon yöntemi ilerleyen çalışmalarda farklı türdeki kesir türevli denklemlere uygulanabilecek basit ve yeterli hassasiyette bir yöntemdir.

REFERANSLAR

Ünlü, C., (2014), Kesirli türevli diferansiyel denklemler ve çözüm yöntemleri, Doktora Tezi, İstanbul: İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Çenesiz, Y., (2007), Bagley-Torvik denkleminin kesirli diferansiyel dönüşüm metodu ile çözümü ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Konya: Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Yadav, P., Jahan, S., ve Nisar, K. S. (2024). Solving fractional Bagley-Torvik equation by fractional order Fibonacci wavelet arising in fluid mechanics. Ain Shams Engineering Journal, 15(1).

Verma, A., Kumar, M. (2021). Numerical solution of Bagley–Torvik equations using Legendre artificial neural network method. Evol. Intel. 14, 2027–2037.

Sakar, M.G., Saldır, O. ve Akgül, A. (2019). A Novel Technique for Fractional Bagley–Torvik Equation. Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci. 89, 539–545.