T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ-CERRAHPAŞA
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BELİRLİ SAYI DİZİLERİ ARACILIĞIYLA DOĞRUSAL OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN ANALİTİK TEKNİKLER

Hanaa MASALATI

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi İnci OKUMUŞ

Anabilim Dalı Adı
MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ

Mühendislik Bilimleri, Tezli Yüksek Lisans Programı

Şubat, 2026

TEZ KABUL VE ONAYI

Hanaa MASALATI tarafından, **Dr. Öğr. Üyesi İnci OKUMUŞ** danışmanlığında hazırlanan **" BELİRLİ SAYI DİZİLERİ ARACILIĞIYLA DOĞRUSAL OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN ANALİTİK TEKNİKLER "** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından **.....** tarihinde yapılan sınav sonucunda **oy birliği** ile başarılı bulunarak **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

		İmza	**Sonuç**
DANIŞMAN	Dr. Öğr. Üyesi İnci OKUMUŞ İstanbul Üniversitesi- Cerrahpaşa Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
ÜYE	Dr. Öğr. Üyesi İlknur HOŞ İstanbul Üniversitesi- Cerrahpaşa Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret
ÜYE	Dr. Öğr. Üyesi Çağlar ZORBİLMEZ İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü/Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Anabilim Dalı		☒ Kabul ☐ Ret

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve bilimsel etik kuralları içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını ve her türlü hukuki sorumluluğu aldığımı kabul ederim.

Hanaa MASALATI

(İmza)

Bir öğe seçin.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması sürecinde verdiği büyük destek, sürekli teşvik ve değerli yönlendirmeleri için saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi İnci Okumuş'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Sabır, azim ve ilim sevgisini kazanmamda en büyük paya sahip olan kıymetli anne ve babama şükranlarımı sunarım.

Zorluklar arasında motivasyonum ve ilham kaynağım olan biricik kızım **(**Hayla)'ya içten teşekkür ederim.

Manevi destekleriyle her zaman yanımda olan sevgili kardeşlerim (Ahmad, Raghad ve Rayan)'a gönülden teşekkür ederim.

Kızımla sevgiyle ilgilenip yokluğumda bana büyük destek olan değerli kız kardeşim **(**Nuha)'ya minnettarlığımı ifade ederim.

Bu süreç boyunca sabrı, anlayışı ve güçlü desteğiyle yanımda olan sevgili kocama (Emad Eddin) en içten teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, bu fırsatı sağlayan Türkiye Cumhuriyeti Devleti'ne ve Yükseköğretim Bakanlığı'na teşekkür eder, sağladıkları değerli imkân için minnettar olduğumu belirtirim.

Şubat 2026 Hanaa MASALATI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEZ KABUL VE ONAYI ii
BEYAN iii
TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
TABLO LİSTESİ ix
SİMGE LİSTESİ x
ÖZET xiii
ABSTRACT xiv
1. GİRİŞ 1
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE 1
2.1 ÖZEL SAYI DİZİLERİ VE FARK DENKLEMLERİNİN TARİHİNE GENEL BAKIŞ 2
2.2 LİTERATÜR İNCELEMESİ 4
3. YÖNTEM 13
3.1 FARK DENKLEMLERİ 13
3.2 TAM SAYI DİZİLERİ 16
3.2.1 Fibonacci Sayıları 16
3.2.2 Tribonacci sayıları 17
3.2.3 Genelleştirilmiş Tribonacci Sayıları 18
3.2.4 Tetranacci Sayıları 21
3.2.5 Padovan Sayıları 23
3.2.6 Genelleştirilmiş Padovan Sayıları 25
3.2.7 Horadam Sayıları 26
3.2.8 Lucas Sayıları 26
3.2.9 Pell Sayıları 27
3.2.10 Pell-Lucas Sayıları 29

3.2.11 Narayana Sayıları.....29
3.2.12 Jacobsthal Sayıları.....31
3.2.13 Jacobsthal-Lucas Sayıları.....31
3.2.14 Perrin Sayıları.....31
3.2.15 Genelleştirilmiş Jacobsthal-Padovan Sayıları.....32
3.2.16 Ayarlanmış Jacobsthal-Padovan Sayıları.....33
4. BULGULAR.....34
4.1 Fark Denklemi (4.1).....35
4.2 Fark Denklemi (4.2).....48
4.3 Fark Denklemi (4.3).....59
4.4 Fark Denklemi (4.4).....70
4.5 Fark Denklemi (4.5).....80
4.6 Fark Denklemi (4.6).....84
5. TARTIŞMA.....90
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....91
KAYNAKLAR.....93
İNTİHAL RAPORU İLK SAYFASI.....99
ETİK KURUL İZİN YAZISI.....100
KURUM İZNİ YAZILARI.....101
ÖZGEÇMİŞ.....102

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 2.1: Fibonacci sayılarının bazı değerleri.....16

Tablo 2.2: Genelleştirilmiş Tribonacci dizilerinin bir dizi değeri.....19

Tablo 2.3: Negatif ve negatif olmayan indekslere sahip Tetranacci sayıları.....22

Tablo 2.4: Negatif Padovan sayılarının bazı değerleri.....25

Tablo 2.5: Narayana sayılarının bazı değerleri.....30

Tablo 2.6: Pozitif ve negatif alt indisli ayarlanmış Jacobsthal–Padovan sayılarının bazı değerleri.....33

SİMGE LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbf{B_n}$	: n'inci Jacobsthal-Padovan sayısı
$\mathbf{C_n}$	: n'inci Padovan sayısı (cordonnier)
$\mathbf{D_n}$	: n'inci Padovan sayısı
$\mathbf{E_n}$	: n'inci Pell-Perrin sayısı
$\mathbf{F_n}$	: n'inci Fibonacci sayısı
$\mathbf{G_n}$	: n'inci Genelleştirilmiş Tribonacci sayısı
$\mathbf{H_n}$	: n'inci Jacobsthal-Perrin sayısı
$\mathbf{I_n}$	: n'inci Tribonacci-Lucas sayısı
$\mathbf{J_n}$	: n'inci Jacobsthal sayısı
$\mathbf{j_n}$	: n'inci Jacobsthal-Lucas sayısı
$\mathbf{K_n}$	: n'inci Ayarlanmış Jacobsthal-Padovan sayısı
$\mathbf{L_n}$	: n'inci Lucas sayısı
$\mathbf{M_n}$	: n'inci Tetranacci sayısı
$\mathbf{N_n}$	: n'inci Narayana sayısı
$\mathbf{O_n}$	: n'inci Padovan-Perrin sayısı
$\mathbf{P_n}$	: n'inci Pell sayısı

$\mathbf{Q_n}$: n'inci Perrin sayısı

$\mathbf{R_n}$: n'inci Pell-Padovan sayısı

$\mathbf{S_n}$: n'inci Genelleştirilmiş Padovan sayısı

$\mathbf{T_n}$: n'inci Tribonacci sayısı

$\mathbf{U_n}$: n'inci Pell-Lucas sayısı

$\mathbf{V_n}$: n'inci Genelleştirilmiş Jacobsthal-Padovan sayısı

$\mathbf{W_n}$: n'inci Horadam sayısı

$\mathbf{Y_n}$: üçüncü dereceden Jacobsthal

$\mathbf{Z_n}$: üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BELİRLİ SAYI DİZİLERİ ARACILIĞIYLA DOĞRUSAL OLMAYAN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN ANALİTİK TEKNİKLER

Hanaa MASALATI

İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı (Disiplinlerarası)

Mühendislik Bilimleri, Tezli Yüksek Lisans Programı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi İnci OKUMUŞ

Bu tezde, aşağıdaki fark denklemlerinin Tetranacci dizisi ile ilişkili çözüm biçimi, denge noktaları, kararlılık özellikleri ve asimptotik davranışı incelenmektedir.

Tez aşağıdaki bölümlerden oluşmaktadır:

Bölüm 1'de, fark denklemlerinin tanımı, başlangıç koşullarının önemi ve nüfus dinamiği, ekonomi, olasılık ve SIR modellemesi gibi çeşitli alanlardaki uygulamaları ele alınmaktadır. Ayrıca, özel tam sayı dizileri kullanılarak rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin davranışlarının inceleneceği vurgulanmaktadır.

Bölüm 2'de, özel tam sayı dizilerinin ve fark denklemlerinin tarihsel gelişimi ele alınmış, ilgili literatür ayrıntılı biçimde değerlendirilmiş ve mevcut bulgular kapsamlı şekilde tartışılmıştır.

Bölüm 3'te, tez kapsamında kullanılan fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmekte; tam sayı dizileri, yineleme ilişkileri ve bunların bazı temel özellikleri incelenmektedir.

Bölüm 4'te, Tetranacci tam sayı dizisi kapsamında incelenen söz konusu aşağıdaki fark denklemlerine ilişkin bazı sonuçlar sunulmakta; denklemlerin denge noktalarının kararlılık özellikleri ile genel asimptotik davranışları analiz edilmektedir.

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{4.1}$$

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} + 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{4.2}$$

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} - 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{4.3}$$

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} + 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{4.4}$$

$$x_{n+1} = \frac{-1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} + 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{4.5}$$

$$x_{n+1} = \frac{-1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} + 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{4.6}$$

Bölüm 5'te, üçüncü mertebeden rasyonel fark denklemlerinin incelenmesinde analitik yöntemlerin ötesine geçilebileceğini ve alternatif matematiksel yapılarla da çözüm davranışlarının açıklanabileceğini göstermektedir. Elde edilen bulgular, literatürdeki çalışmalarla uyumlu bir çerçeve sunarken, farklı parametre düzenleri sayesinde konuya yeni bir yorum kazandırmakta ve denklemlerin genel çözüm dinamiklerine dair değerli sonuçlar ortaya koymaktadır.

Bölüm 6'da, incelenen üçüncü mertebeden rasyonel fark denklemlerinin başlangıç değerlerine bağlı olarak kararlı, periyodik ve bazen de hiperbolik olmayan denge davranışları sergilediği ortaya konulmaktadır. Ayrıca, bu denklemlerin çözümlerinin özel sayı dizileriyle ilişkilendirilerek literatüre yeni katkılar sağladığı vurgulanmaktadır.

Şubat 2026 , 117 sayfa.

Anahtar kelimeler: Fark denklemi, denge noktası, doğrusallaştırılmış kararlılık , asimptotik davranış , tam sayı dizileri, Tetranacci sayıları

ABSTRACT

M.Sc. THESIS

ANALYTICAL TECHNIQUES FOR SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS VIA SPECIFIC NUMBER SEQUENCES

Hanaa MASALATI

İstanbul University-Cerrahpaşa

Institute of Graduate Studies

Department of Engineering Sciences

Name of Programme

Supervisor : Assist. Prof. Dr. İnci OKUMUŞ

In this thesis, we study the solution form, equilibrium point, stability properties, and asymptotic behavior of the following difference equations with respect to the Tetranacci sequence**,** which is a special numerical sequence.

The thesis consists of the following chapters:

In Chapter 1**,** difference equations are discussed along with the importance of initial conditions and their wide-ranging applications in areas such as population dynamics, economics, probability, and epidemic modeling. The chapter also emphasizes that the study will focus on analyzing the behavior of rational difference equations using special integer sequences.

In Chapter 2**,** the historical development of special integer sequences and difference equations is examined, and a detailed review of the related literature and findings is presented.

In Chapter 3**,** the fundamental definitions and theorems used throughout the thesis are introduced, and integer sequences, recurrence relations, and some of their properties are discussed.

In Chapter 4**,** several results concerning the following difference equations investigated with respect to the Tetranacci integer sequence are presented, and the stability properties of the equilibrium points of the equations as well as its general asymptotic behaviors are analyzed.

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - 1) - 1} \quad , \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{4.1}$$

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} + 1) + 1} \quad , \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{4.2}$$

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} - 1) + 1} \quad , \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{4.3}$$

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} + 1) - 1} \quad , \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{4.4}$$

$$x_{n+1} = \frac{-1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} + 1) + 1} \quad , \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{4.5}$$

$$x_{n+1} = \frac{-1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} + 1) - 1} \quad , \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{4.6}$$

In Chapter 5**,** in the study of third-order rational difference equations, it is possible to go beyond analytical methods and explain solution behavior using alternative mathematical structures. While the findings provide a framework consistent with the existing literature, different parameter configurations offer a new interpretation of the subject and yield valuable results regarding the overall solution dynamics of these equations.

In Chapter 6**,** demonstrates that the third-order rational difference equations examined exhibit stable, periodic, and sometimes non-hyperbolic equilibrium behavior depending on their initial values. Furthermore, it is emphasized that associating the solutions of these equations with special number sequences provides new contributions to the literature.

February 2026, 117 pages.

Keywords: Difference equation, equilibrium point, linearized stability, asymptotic behavior, sequences of integers, Tetranacci numbers

1. GİRİŞ

Fark denklemleri, uzun yıllar boyunca çok sayıda bilimsel problemin çözümüne önemli katkılar sağlamıştır. Bu denklemler, ardışık terimler arasındaki ilişkileri tanımlar ve çözümlerinin belirlenebilmesi için başlangıç değer koşullarının verilmesi zorunludur. Başlangıç koşulları, fark denkleminin kesin çözümünü elde etmek açısından temel bir rol oynar. Aynı zamanda fark denklemleri, birer tekrarlama (rekürsiyon) ilişkisi olarak da ifade edilebilir [1-5].

Nüfusun zamanla değiştiği birçok günlük yaşam problemi, fark denklemleri aracılığıyla başarılı bir şekilde modellenebilir. Her ne kadar bu alanda uzun yıllar boyunca çok sayıda çalışma yapılmış olsa da, hâlen çözüm bekleyen pek çok açık problem bulunmaktadır. Değişimin sürekli değil, ayrık zaman aralıklarında gerçekleştiği durumlarda diferansiyel denklemler yetersiz kalmakta; bu tür problemlerin çözümünde fark denklemlerinin kullanılması daha uygun olmaktadır [6].

Fark denklemlerinin en bilinen uygulama alanları arasında somon popülasyonu modelleri, aylık bileşik faiz hesaplamaları gibi örnekler yer almaktadır. Bunun yanı sıra olasılık teorisi, popülasyon dinamiği, istatistiksel analizler, yarı ömür hesaplamaları, ekonomik modeller, radyasyon miktarının belirlenmesi, bilgisayar bilimleri ve bulaşıcı hastalıkların yayılım hızının incelendiği S.I.R modellemesi gibi pek çok alanda düzenli olarak kullanılmaktadır [8].

1950'li yıllardan itibaren fark denklemleri, matematiksel araştırmalar açısından önemli bir çalışma alanı hâline gelmiş; özellikle son otuz yılda bu konuya yönelik çalışmalar büyük bir ivme kazanmıştır. Matematikte yer alan özel tam sayı dizileri, fark denklemleriyle çalışmak için oldukça elverişli bir yapı sunmaktadır. Bu nedenle, bu çalışmada bazı rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı, özel tam sayı dizileri yardımıyla incelenecektir.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1 ÖZEL SAYI DİZİLERİ VE FARK DENKLEMLERİNİN TARİHİNE GENEL BAKIŞ

Bu bölümde, fark denklemlerinin tarihsel gelişimi ele alınmakta ve bu alana katkı sunmuş önemli matematikçi ve bilim insanlarının çalışmaları incelenmektedir. Fark denklemlerinin kökeni, matematiğin erken dönemlerine kadar uzanmakta olup özellikle özel sayı dizileriyle olan ilişkisi dikkat çekicidir.

Fark denklemleriyle en sık ilişkilendirilen sayı dizilerinden biri, İtalyan matematikçi *Leonardo da Pisa*, bilinen adıyla Fibonacci tarafından ortaya konulan Fibonacci sayı dizisidir. Fibonacci, ilk kez 1202 yılında yayımlanan *Liber Abaci* adlı eserinde, Orta Çağ matematiği açısından büyük önem taşıyan Hint-Arap rakam sistemini (modus Indorum) Avrupa'ya tanıtmıştır. Bu eser, yalnızca aritmetik hesaplamalar açısından değil, aynı zamanda fark denklemlerinin ilk örneklerinden biri olarak kabul edilen Fibonacci sayı dizisinin tanıtılması bakımından da önemli bir yere sahiptir [9,10].

Fibonacci sayı dizisi bir tam sayı dizisi olup, dizideki her terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamı olarak tanımlanır. Bu dizi, matematikte yaygın olarak Altın Oran ile ilişkilendirilmekte ve doğada ayçiçeği, ananas, kozalak gibi birçok yapıda gözlemlenmektedir. Fibonacci sayıları ilk olarak, idealize edilmiş bir tavşan popülasyonu probleminin çözümü sırasında ortaya çıkmıştır. Bu problemde, yeni doğmuş bir tavşan çifti belirli bir alana yerleştirilir; her çift ikinci aydan itibaren üreme yeteneğine sahip olur ve her ay yeni bir tavşan çifti doğurur.

Tavşanların hiç ölmediği varsayımı altında, bir yılın sonunda bölgedeki toplam tavşan çifti sayısı sorulmaktadır [8,11].

Bu model sonucunda elde edilen sayı dizisi, Fibonacci tarafından 1 ile başlatılmış ve hesaplama on üçüncü ayda 233 değerine ulaşmıştır. Günümüzde kullanılan Fibonacci sayı dizisi ise sıfır terimini de içerecek şekilde şu biçimde ifade edilmektedir:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ \ldots$$

"Fibonacci sayıları" terimi, 1876 yılında Fransız matematikçi *Édouard Lucas* tarafından literatüre kazandırılmıştır. Lucas, bu dizinin özelliklerini sistematik olarak incelemiş ve böylece dizinin modern matematikteki yerini sağlamlaştırmıştır.

Fibonacci sayı dizisinin genelleştirilmiş tanımı aşağıdaki yinelemeli (rekürsif) ilişki ile verilir:

$$F_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & n > 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Bu tanım, fark denklemlerinin temel yapısını yansıtmakta olup, özel sayı dizilerinin dinamik davranışlarının incelenmesinde önemli bir başlangıç noktası oluşturmaktadır.

Fibonacci sayıları, sabit katsayılı doğrusal bir tekrarlama ilişkisiyle tanımlanan birçok sayı dizisi gibi, kapalı formda bir ifadeye sahiptir. Bu kapalı form, tarihsel olarak *Abraham de Moivre* ve *Daniel Bernoulli* tarafından büyük ölçüde bilinmesine rağmen, Fransız matematikçi *Jacques Philippe Marie Binet*'nin çalışmalarıyla literatürde yer edinmiş ve günümüzde Binet formülü olarak adlandırılmıştır.

17. ve 18. yüzyıllar arasında Bernoulli, *de Moivre, Pascal* ve *Newton* gibi pek çok bilim insanı fark denklemleri üzerinde önemli çalışmalar gerçekleştirmiştir. Bu dönemde fark denklemleri çoğunlukla tekrarlama ilişkileri biçiminde ortaya çıkmış ve sistematik olarak incelenmeye başlanmıştır. Özellikle de *Moivre*, homojen, doğrusal ve sabit katsayılı ayrık denklemlerin kapalı formda çözülebilmesi için gerekli temel kavramları ortaya koyan ilk matematikçilerden biri olmuştur [8,9,10].

Bu bağlamda önemli bir diğer sınıf, Riccati fark denklemleridir [4]. Genel biçimi

$$y_{n+1} = \frac{a + by_n}{c + dy_n}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{2.2}$$

şeklinde verilen bu denklem, literatürde Riccati fark denklemi olarak bilinmektedir. Bu tür denklemler, doğrusal olmayan fark denklemlerinin ilk önemli örnekleri arasında yer almaktadır.

18. yüzyılda *Leonhard Euler*, *Institutiones Calculi Differentialis* adlı eserinde günümüzde kullanılan matematiksel gösterimlere oldukça yakın bir sembolik dil kullanmış ve fark operatörünü (Δ) açık bir biçimde tanımlamıştır. Euler, ayrıca de Moivre'nin yöntemlerini sistematik hâle getirerek fark denklemleri teorisinin gelişimine önemli katkılarda bulunmuştur [12].

19. yüzyılda İngiliz matematikçi *Charles Babbage*, ardışık farklara dayalı hesaplamalar yapabilen mekanik bir cihaz tasarlamış ve bu aygıtı Fark Makinesi (Difference Engine) olarak adlandırmıştır. Bu çalışmaları nedeniyle *Babbage* sıklıkla "bilgisayarın babası" olarak anılmaktadır. Bir polinomun belirli sayıda başlangıç değeri bilindiğinde, geri kalan değerlerin ardışık farklar yardımıyla hesaplanabilmesi bu yaklaşımın temelini oluşturmaktadır [13].

Bu dönemde Pierre-Simon Laplace, bazı doğrusal olmayan fark denklemlerinin kapalı form çözümleri üzerine yöntemler geliştirmiştir. Felice Casorati ise fark denklemleri teorisinde önemli bir araç olan Casorati determinantını (Casorati matrisi) tanıtmış; bu yapı doğrusal fark denklemlerinin çözümünde etkin bir yöntem olarak kullanılmaya başlanmıştır [14,15].

Fransız matematikçi *Édouard Lucas*, Fibonacci sayı dizisi üzerine yaptığı çalışmalarla bu dizinin günümüzde kullanılan formülasyonunu geliştirmiş ve aynı zamanda Lucas sayı dizisini tanımlamıştır. [16] Lucas sayı dizisi

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \cdots$$

şeklinde verilen bir tam sayı dizisidir ve Fibonacci dizisine benzer bir tekrarlama ilişkisine sahiptir. Fibonacci yaklaşımı, Lucas dizisi için de benzer biçimde geçerlidir. Lucas ayrıca, günümüzde hâlen kullanılan Mersenne asal sayıları testini de geliştirmiştir [1].

20. yüzyılın başlarında matematikçiler, düzlem dolduran eğriler ve daha sonra fraktal olarak adlandırılacak geometrik yapıları incelemeye başlamış ve bu yapıların fark denklemleriyle olan ilişkilerini ortaya koymuşlardır. *Giuseppe Peano*, 1890 yılında uzay dolduran eğrisini tanıtmış; bunu 1891'de *David Hilbert'in* benzer çalışmaları izlemiştir. Bu yapılar, fraktal geometrinin ilk örnekleri olarak kabul edilmektedir [17].

Weierstrass fonksiyonu, incelenen ilk fraktal benzeri yapılardan biri olup her yerde sürekli ancak hiçbir noktada türevlenebilir değildir. 1872 yılında Weierstrass, süreklilik kavramını kesin biçimde tanımlamış ve sürekliliğin türevlenebilirliği garanti etmediğini göstermiştir. Bu fonksiyon, kendi kendine benzer yapısıyla fraktal özellikler taşımaktadır [18].

İsveçli matematikçi *Niels Fabian Helge von Koch*, kendi adıyla anılan Koch kar tanesi fraktalını tanıtmış ve bu yapı fraktal geometrinin klasik örneklerinden biri hâline gelmiştir. Aynı dönemde *Runge ve Kutta*, diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerini çözmek için yaygın olarak kullanılan Runge–Kutta yöntemini geliştirmiştir. Bu yöntem, Euler yönteminin sınırlılıklarını aşmayı hedeflemiş ve sayısal çözüm tekniklerinde önemli bir dönüm noktası olmuştur [19].

Bu gelişmelerle birlikte, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde fark denklemlerine dayalı yaklaşımlar yaygınlaşmış; özellikle 1950'li yıllardan itibaren fark denklemleri teorisi sistematik bir araştırma alanı olarak hızla gelişmiştir.

Bu bölümde, fark denklemlerinin ve özel sayı dizilerinin tarihsel gelişimi kronolojik bir çerçevede ele alınmış ve sonraki bölümlerde ayrıntılı olarak incelenecek teorik altyapı oluşturulmuştur [20].

2.2 LİTERATÜR İNCELEMESİ

Bu bölümde, Fibonacci, Padovan, Tribonacci, Jacobsthal–Padovan, Pell, Horadam ve benzeri iyi bilinen özel tam sayı dizileri cinsinden ifade edilen fark denklemleri üzerine yapılmış çalışmalar incelenmektedir. Özellikle sabit katsayılı ve rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin, bu sayı dizileri aracılığıyla kapalı formda ya da yinelemeli biçimde ifade edildiği çalışmalar literatür kapsamında ele alınmıştır.

Ayrıntılı bir literatür taraması sonucunda, fark denklemlerinin çözüm yapılarının özel tam sayı dizileriyle doğrudan ilişkili olduğunu ortaya koyan tez ve makalelere odaklanılmıştır. Bu çalışmalarda, söz konusu dizilerin denge noktalarının analizi, asimptotik davranışları, kararlılık özellikleri ve dinamik yapıları incelenmiştir. Ayrıca bazı çalışmalar, fark denklemlerinin çözümlerinin karakteristik denklemler aracılığıyla ilgili sayı dizilerinin genel terimleriyle ifade edilebildiğini göstermektedir [8].

Bu bağlamda, literatürde yer alan bahsi geçen çalışmalardan bazıları aşağıdadır.

[21] numaralı çalışmada Tollu ve diğerleri**,** aşağıdaki genel biçimde verilen Riccati fark denklemini incelemişlerdir:

$$x_{n+1} = \frac{a \ + \ bx_n}{c \ + dx_n}, \qquad n = 0, 1, \cdots. \tag{2.3}$$

Bu çalışmada, Riccati fark denklemi için özel parametre seçimleri yapılarak iki farklı özel durum ele alınmıştır. İlk olarak $a = c = d = 1 \; ve \; b \; = 0$ alınmış, ikinci olarak ise $a = d = 1$, $c = -1$, $b = 0$ seçilmiştir. Bu parametre değerleri altında, (2.3) denkleminin sırasıyla aşağıdaki fark denklem sistemi indirgenmiştir:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{1}{-1 \ + y_n}, \qquad n = 0, 1, \cdots. \tag{2.4}$$

Yazarlar, (2.4) Riccati fark denklemi ile verilen fark denklem sisteminin çözümlerini ayrıntılı olarak incelemiş ve çözümlerin Fibonacci sayı dizisi ile doğrudan ilişkili olduğunu göstermişlerdir.

Başlangıç koşulları,

$$x_0 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty} \qquad ve \qquad y_0 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$$

şeklinde verilmiştir. Burada F_m, m'inci Fibonacci sayısını ifade etmektedir. Bu koşullar altında, $n = 0,1,2, \ldots$ için (2.4) fark denklem sisteminin çözümleri aşağıdaki kapalı form ifadeleriyle elde edilmiştir:

$$x_n = \frac{F_n \ + F_{n-1} \, x_0}{F_{n+1} \ + F_n \, x_0} \qquad için \qquad x_0 \in \mathbb{R} - \left(\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right\} \cup \left\{-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}\right)$$

$$y_n = \frac{F_{-n} \ + F_{-(n-1)} \, y_0}{F_{-(n+1)} \ + F_{-n} \, y_0} \qquad için \qquad y_0 \in \mathbb{R} - \left(\{\alpha, \beta\} \cup \left\{\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}\right)$$

Bu sonuçlar, Riccati tipindeki rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin özel tam sayı dizileri, özellikle Fibonacci sayıları yardımıyla kapalı formda ifade edilebileceğini göstermesi bakımından literatürde önemli bir yere sahiptir.

[22] numaralı çalışmada Halim, aşağıdaki biçimde verilen fark denklemi sisteminin açık (kapalı form) çözümlerini incelemiştir:

$$x_{n+1} = \frac{1}{\pm 1 \pm y_{n-k}}, \qquad y_{n+1} = \frac{1}{\pm 1 \ \pm x_{n-k}}, \qquad n \, , k \ \in \ N_0. \tag{2.5}$$

Bu sistemde başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, .., x_0, y_{-k}, y_{-k+1}, .., y_0$ sıfırdan farklı reel sayılar olarak alınmıştır. Halim, bu koşullar altında sistemin çözümlerinin Fibonacci sayı dizisi ile doğrudan ilişkili olduğunu göstermiştir.

Ayrıca, genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını içeren aşağıdaki özel sistem için genel çözümler elde edilmiştir:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + y_{n-2}}, \qquad y_{n+1} = \frac{1}{1 + x_{n-2}}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{2.6}$$

burada başlangıç değerleri $x_{-2}, y_{-2}, x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ olmak üzere keyfi reel sayılardır. Bu koşullar altında, (2.6) denklem sistemi çözümleri aşağıdaki biçimde verilmiştir:

$$x_{6n+i} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}\, y_{i-3}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}\, y_{i-3}}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$y_{6n+i} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}\, x_{i-3}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}\, x_{i-3}}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$x_{6n+i} = \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}\, x_{i-6}}{F_{2n+3} + F_{2n+2}\, x_{i-6}}, \qquad i = 4, 5, 6,$$

$$y_{6n+i} = \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}\, y_{i-6}}{F_{2n+3} + F_{2n+2}\, y_{i-6}}, \qquad i = 4, 5, 6,$$

burada F_n, n'inci Fibonacci sayısını göstermektedir.

Buna ek olarak, yazar (2.5) sisteminin denge noktasının $E = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ olduğunu ve bu denge noktasının küresel asimptotik kararlı olduğunu ispatlamıştır.

[23] numaralı çalışmada Yazlık ve diğerleri, aşağıda verilen rasyonel fark denklemi sistemlerini incelemişlerdir:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \pm 1}{y_n x_{n-1}}, \qquad y_{n+1} = \frac{y_{n-1} \pm 1}{x_n y_{n-1}}, \qquad n = 0, 1, \cdots. \tag{2.7}$$

Bu çalışmada, ele alıran denklem sistemlerinin çözümlerinin Padovan sayı dizisi ile ilişkili olduğu gösterilmiş ve (2.7) denklem sistemlerinin çözümleri aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

D_n ifadesi, n'inci Padovan sayısını göstermek üzere:

$$x_n = \begin{cases} \pm\dfrac{D_n x_{-1} y_0 \pm D_{n+1} x_{-1} + D_{n-1}}{D_{n-1} x_{-1} y_0 \pm D_n x_{-1} + D_{n-2}}, & ise\ n\ tek \\ \pm\dfrac{D_n y_{-1} x_0 \pm D_{n+1} y_{-1} + D_{n-1}}{D_{n-1} y_{-1} x_0 \pm D_n y_{-1} + D_{n-2}}, & ise\ n\ çift \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} \pm\dfrac{D_n y_{-1} x_0 \pm D_{n+1} y_{-1} + D_{n-1}}{D_{n-1} y_{-1} x_0 \pm D_n y_{-1} + D_{n-2}}, & ise\ n\ tek \\ \pm\dfrac{D_n x_{-1} y_0 \pm D_{n+1} x_{-1} + D_{n-1}}{D_{n-1} x_{-1} y_0 \pm D_n x_{-1} + D_{n-2}}, & ise\ n\ çift. \end{cases}$$

Bu sonuçlar, Padovan sayı dizisinin rasyonel fark denklemlerinin kapalı form çözümlerinde etkin bir biçimde kullanılabileceğini ortaya koymaktadır.

Farklı bir çalışma, [24] numaralı çalışmada Okumuş ve Soykan, aşağıdaki rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin biçimini, kararlılık özelliklerini ve asimptotik davranışlarını incelemiştir:

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n(x_{n-1} - 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{2.8}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n(x_{n-1} + 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{2.9}$$

$$x_{n+1} = \frac{-1}{x_n(x_{n-1} - 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{2.10}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n(x_{n-1} + 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots. \tag{2.11}$$

Özellikle (2.8) denkleminin çözümleri, genelleştirilmiş Tribonacci sayıları yardımıyla aşağıdaki kapalı formda elde edilmiştir. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözüm dizisi için:

$$x_n = \frac{T_{-n} x_{-1} x_0 + (T_{-(n+1)} + T_{-(n+2)}) x_0 + T_{-(n+1)}}{T_{-(n+1)} x_{-1} x_0 + (T_{-n} - T_{-(n+1)}) x_0 + T_{-(n+2)}}$$

burada T_n, n'inci Tribonacci sayısını göstermektedir. Başlangıç koşulları x_{-1}, $x_0 \in -F_1$ şeklinde verilmiş olup, yasaklı küme F_1 aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$F_1 = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \{(x_{-1}, x_0): T_{-(n+1)}x_{-1}x_0 + (T_{-n} - T_{-(n+1)})x_0 + T_{-(n+2)} = 0\}.$$

Aynı çalışmada, genelleştirilmiş Tribonacci sayıları ile ilişkili olan (2.9), (2.10) ve (2.11) denklemlerinin da kapalı form çözümleri elde edilmiştir.

[25] numaralı çalışmada Göcen, aşağıdaki rasyonel fark denkleminin dinamik davranışlarını incelemiştir:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{x_n x_{n-1} - 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots. \tag{2.12}$$

Burada yalnızca $\alpha > 0$ durumu ele alınmış olup, söz konusu çalışmada (2.12) denkleminin kapalı form çözümleri verilmemiş, bunun yerine denklemin dinamik özellikleri analiz edilmiştir.

Buna karşılık, $\alpha = 2$ ve $\alpha = -2$ özel durumları için, ayarlanmış Jacobsthal–Padovan sayıları kullanılarak (2.12) denkleminin kesin çözümleri elde edilmiştir. Bu amaçla ilk olarak aşağıdaki rasyonel fark denklemlerinin kapalı form çözümleri incelenmiştir:

$$x_{n+1} = \frac{2}{x_n x_{n-1} - 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{2.13}$$

$$x_{n+1} = \frac{-2}{x_n x_{n-1} - 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots. \tag{2.14}$$

Bu denklemlerin çözümleri ayarlanmış Jacobsthal–Padovan sayı dizileri cinsinden elde edilmiş ve çözümlerin asimptotik davranışları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca (2.13) denklem ve (2.14) denkleminin kesin çözümleri ile ayarlanmış Jacobsthal–Padovan sayıları arasındaki doğrudan ilişki ortaya konmuştur.

Genelleştirilmiş Jacobsthal–Padovan sayı dizisi $\{V_n\}_{n\geq 0} = \{V_n(V_0, V_1, V_2)\}_{n\geq 0}$ üçüncü dereceden bir yineleme ilişkisi ile tanımlanmaktadır.

Bu bağlamda, (2.13) denkleminin çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi için aşağıdaki biçimde verilmiştir:

$$x_n = \frac{2^n K_{-n} x_{-1} x_0 + 2^n K_{-(n-1)} x_0 + 2^{n+1} K_{-(n+1)}}{2^n K_{-(n+1)} x_{-1} x_0 + 2^n K_{-n} x_0 + 2^{n+1} K_{-(n+2)}}$$

burada K_n, n'inci ayarlanmış Jacobsthal–Padovan sayısını göstermektedir. Başlangıç koşulları $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R} - F$ şeklinde verilmiş olup, F kümesi denklem (2.13)'ün yasaklı kümesi olarak tanımlanmıştır:

$$F = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \{(x_{-1}, x_0): 2^n K_{-(n+1)} x_{-1} x_0 + 2^n K_{-n} x_0 + 2^{n+1} K_{-(n+2)} = 0\}.$$

Benzer şekilde, (2.14) denklemi için çözüm aşağıdaki biçimde elde edilmiştir:

$$x_n = \frac{2^n K_{-n} x_{-1} x_0 - 2^n K_{-(n-1)} x_0 + 2^{n+1} K_{-(n+1)}}{-2^n K_{-(n+1)} x_{-1} x_0 + 2^n K_{-n} x_0 - 2^{n+1} K_{-(n+2)}}$$

ve bu durumda yasaklı küme

$$F = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \{(x_{-1}, x_0): -2^n K_{-(n+1)} x_{-1} x_0 + 2^n K_{-n} x_0 - 2^{n+1} K_{-(n+2)} = 0\}.$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu sonuçlar, rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin yalnızca Fibonacci ve Padovan dizileriyle değil, aynı zamanda Jacobsthal–Padovan türü genelleştirilmiş dizilerle de ifade edilebileceğini göstermesi bakımından literatüre önemli katkılar sunmaktadır.

[26] numaralı çalışmada ise aşağıdaki rasyonel fark denklem sisteminin kapalı form çözümleri elde edilmiştir:

$$x_n = \frac{z_{n-1} z_{n-3}}{x_{n-2} + 2z_{n-3}},$$

$$y_n = \frac{x_{n-1} x_{n-3}}{-y_{n-2} + 6x_{n-3}}, \tag{2.15}$$

$$z_n = \frac{y_{n-1} y_{n-3}}{z_{n-2} + 14y_{n-3}}.$$

Burada $n \in \mathbb{N}_0$ olup, başlangıç değerleri $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, z_{-3}, z_{-2}, z_{-1}$ sıfır olmayan reel sayılardır. Çözümler Pell sayılarıyla ilişkilendirilmiş ve Pell sayılarının Binet formülü kullanılarak açık biçimde ifade edilmiştir.

Bu makalede elde edilen sonuçlar, Binet formülünün sağladığı yöntem kullanılarak benzer türdeki fark denklemleri çerçevesine genişletilebilir. Ayrıca bu yaklaşım, çözümlerin Pell–Lucas, Jacobsthal, Fibonacci ve Horadam sayı dizileri cinsinden ifade edilebileceği daha genel sistemlere de uyarlanabilir.

Ayrıca, [27]'de Halim ve diğeri aşağıdaki fark denkleminin çözüm biçimini belirlemiştir:

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{\delta y_n y_{n-1}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.16}$$

Uygun bir dönüşüm kullanılarak bu denklem doğrusal tipte bir fark denklemine indirgenmiş ve çözümlerinin genelleştirilmiş Padovan sayılarıyla ilişkili olduğu gösterilmiştir.

Öte yandan, [28]'de Stević, aşağıdaki Riccati tipli fark denkleminin çözümlerinin formülüne ilişkin teorik bir açıklama sunmuştur:

$$y_{n+1} = \frac{\alpha y_n + \beta}{\gamma y_n + \delta}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.17}$$

burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametreleri ile başlangıç değeri y_0 reel sayılardır. Bu çalışmada, denklemin çözümlerinin genelleştirilmiş Fibonacci sayılarıyla ilişkilendirilebileceği ortaya konmuştur.

[29]'da Halim ve Bayram, aşağıdaki fark denkleminin çözümlerini, kararlılık özelliklerini ve asimptotik davranışını incelemiştir:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma x_{n-k}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.18}$$

Başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$ sıfır olmayan reel sayılar olarak alınmış olup, denklemin çözümlerinin genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan Horadam sayılarıyla ilişkili olduğu gösterilmiştir.

Bu amaçla, $q = \frac{\alpha}{\gamma}$ ve $p = \frac{\beta}{\gamma}$ dönüşümleri yapılarak (2.18) denklemi aşağıdaki forma indirgenmiştir:

$$x_{n+1} = \frac{q}{p + x_{n-k}}. \tag{2.19}$$

Ardından, fark denklemi (2.19)'un çözümlerinin aşağıdaki biçimde ifade edilebileceği kanıtlanmıştır:

$$x_{(k+1)n+i} = \frac{W_{n+1} + W_n\, x_{i-(k+1)}}{W_{n+2} + W_{n+1}\, x_{i-(k+1)}} q, \qquad i = 1, 2, \dots, k+1,$$

burada W_n, n'inci Horadam sayısını göstermektedir.

Ayrıca, fark denklemi (2.19)'un denge noktası $E = \frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ olup, bu denge noktasının küresel asimptotik kararlı olduğu elde edilmiştir.

Bunun yanı sıra, [30]'da yazarlar aşağıdaki biçimde tanımlanan fark denklem sistemlerini incelemişlerdir:

$$x_{n+1} = \frac{1 + p_n}{q_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{1 + r_n}{s_n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.20}$$

Burada p_n, q_n, r_n ve s_n dizilerinin her biri, x_n veya y_n dizilerinin uygun alt dizilerinden oluşmaktadır. Ele alınan on altı olası sistemden on dört tanesi çözülmüş olup, özellikle on iki sistemin çözümlerinin temsil formülleri Fibonacci sayıları cinsinden elde edilmiştir. Ayrıca, on sistem için çözümlerin, altın oran α olmak üzere tek bir denge noktasına (α, α) yakınsadığı gösterilmiştir.

[31]'de Bacani ve Rabago, aşağıdaki doğrusal olmayan fark denklem sistemlerinin çözümlerinin davranışını incelemiştir:

$$x_{n+1} = \frac{q}{p + x_n^v} \qquad ve \quad y_{n+1} = \frac{q}{-p + y_n^v}, \tag{2.21}$$

burada $p, q \in \mathbb{R}^+$ ve $v \in \mathbb{N}$'dir. Özellikle $v = 1$ durumu için, denklem sisteminin çözümlerinin aşağıdaki biçimde ifade edilebileceğini göstermişlerdir:

$$x_n = \frac{qW_n + x_0\, q\, W_{n-1}}{W_{n+1} + x_0\, W_n}$$

$$y_n = \frac{q\, W_{-n} + y_0\, q\, W_{-(n-1)}}{W_{-(n+1)} + y_0\, W_{-n}},$$

burada W_n, n'inci Horadam sayısını göstermektedir.

Bu noktada, [32]'de Stević ve diğerleri aşağıdaki doğrusal olmayan ikinci fark denklemini ele almışlardır:

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.22}$$

Burada parametreler a, b, c ve başlangıç değerleri x_{-1}, x_0 karmaşık sayılar olup $c \neq 0$'dır.

$$x_n = \frac{y_n}{y_{n-1}}$$

Değişken dönüşümü kullanılarak denklem, sabit katsayılı üçüncü mertebeden doğrusal fark denklemine dönüşür:

$$y_{n+1} = ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2}.$$

Bu dönüşüm yardımıyla, (2.22) denkleminin her bir çözümünün temsil formülünün aşağıdaki şekilde olduğu gösterilmiştir:

$$x_n = \frac{(S_{n+1} - a\,S_n)x_{-1} + S_n\,x_0x_{-1} + c\,S_{n-1}}{(S_n - a\,S_{n-1})x_{-1} + S_n\,x_0x_{-1} + c\,S_{n-2}},$$

burada S_n, n'inci genelleştirilmiş Padovan sayısını ifade etmektedir.

Bu bakış açısına ilişkin daha ayrıntılı ve tamamlayıcı tartışmalar [33-35] numaralı referanslarda bulunabilir. Konuya dair ilgili diğer çalışmalar için (bkz. [1,2,8,22,23,28-30,36-47]).

3. YÖNTEM

Bu bölümde tez boyunca gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Ayrıntılar için [1,3,39,48-59] kaynaklarından yararlanılmıştır.

3.1 FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde fark denklemleri ve fark denklem sistemleri (ayrık dinamik sistemler) hakkında bazı önemli tanım ve teoremleri vereceğiz.

I reel sayıların bir aralığı ve $f : I^{k+1} \to I$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $(k+1)$. mertebeden bir fark denklemi,

$$x_{n+1} = f\,(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}), \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

(3.1) denkleminin bir çözümü her $n \geq -k$ için (3.1) denklemini sağlayan bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ biçimindeki bir dizidir.

Tanım 3.1

(3.1) denkleminin tüm $n \geq -k$ için sabit olan bir çözümüne, (3.1) denkleminin denge çözümü denir.

Eğer

$$x_n = \bar{x}\ , \text{ tüm } n \geq -k,$$

şeklinde bir çözüm mevcut ise, bu durumda $\bar{x}$, (3.1) denkleminin bir denge noktası ya da kısaca (3.1) denkleminin bir dengesi olarak adlandırılır.

Tanım 3.2 (Kararlılık)

$\bar{x}$, (3.1) denkleminin bir denge noktası olsun.

(a) (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$, her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ mevcut olup, başlangıç koşulları

$$|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{1-k} - \bar{x}| + \ldots + |x_0 - \bar{x}| < \delta,$$

şartını sağlayan her $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi (3.1) denkleminin bir çözümü olduğunda,

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon\ , \text{ tüm } n \geq -k,$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, yerel kararlı (locally stable) olarak adlandırılır.

(b) (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$, yerel kararlı olmasının yanı sıra, bir $\gamma > 0$ mevcut olup,

$$|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \ldots + |x_0 - \bar{x}| < \gamma\,,$$

koşulunu sağlayan her çözüm için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x},$$

oluyorsa, yerel asimptotik kararlı (locally asymptotically stable) olarak adlandırılır.

(c) (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$, (3.1) denkleminin her bir çözümü $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x},$$

sağlanıyorsa, küresel çekici (global attractor) olarak adlandırılır.

(d) Eğer denge noktası $\bar{x}$, yerel kararlı olup aynı zamanda küresel çekici ise, küresel asimptotik kararlı (globally asymptotically stable) olarak adlandırılır.

(e) (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$, yerel kararlı değilse kararsız (unstable) olarak adlandırılır.

Şimdi, f fonksiyonunun denge noktası $\bar{x}$'in bir açık komşuluğunda sürekli türevlenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \ldots\ldots, \bar{x}), \qquad i = 0,1, \ldots, k,$$

ile gösterilen ifadeler, $f(u_0, u_1, \ldots, u_k)$ fonksiyonunun u_i'ye göre kısmi türevlerinin, (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$'te değerlendirilmiş hâllerini ifade eder.

Tanım 3.3.

Denklem

$$y_{n+1} = q_0 y_n + q_1 y_{n-1} + \ldots + q_k y_{n-k}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.2}$$

denge noktası $\bar{x}$ etrafında (3.1) denkleminin doğrusallaştırılmış denklemi (linearized equation) olarak adlandırılır.

(3.1) denklemine karşılık gelen karakteristik denklem ise

$$\lambda^{k+1} - q_0 \lambda^k - \ldots - q_{k-1}\lambda - q_k = 0, \tag{3.3}$$

şeklindedir.

(3.3) denklemi, (3.2) denkleminin karakteristik denklemi olarak adlandırılır ve bu denklem, (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$ civarındaki yerel dinamik davranışının incelenmesinde temel rol oynar.

Teorem 3.1 (Doğrusallaştırılmış Kararlılık Teoremi).

f fonksiyonunun, (3.1) denkleminin bir denge noktası olan $\bar{x}$'in bir açık komşuluğunda sürekli türevlenebilir olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(a) (3.3) karakteristik denkleminin tüm köklerinin mutlak değeri birden küçük ise, (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$ yerel asimptotik kararlıdır**.**
(b) (3.3) karakteristik denkleminin en az bir kökünün mutlak değeri birden büyük ise, (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$ kararsızdır**.**
(c) Eğer (3.3) karakteristik denkleminin hiçbir kökünün mutlak değeri bire eşit değilse, (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$ hiperbolik olarak adlandırılır. (3.3) karakteristik denkleminin en az bir kökünün mutlak değeri bire eşit ise, bu denge noktası hiperbolik olmayan olarak adlandırılır.
(d) (3.3) karakteristik denkleminin tüm köklerinin mutlak değeri birden büyük ise, (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$ itici (repelling) denge noktasıdır.
(e) (3.3) karakteristik denkleminin köklerinden en az birinin mutlak değeri birden büyük, diğerinin ise birden küçük olması durumunda, (3.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}$ eyer (saddle) olarak adlandırılır.

Bunu izleyen iki teorem, sırasıyla ikinci ve üçüncü dereceden reel bir polinomun tüm köklerinin modülünün birden küçük olması için gerekli ve yeterli koşulları verir.

Teorem 3.2 ([60], s.6)

$a_1 \; ve \; a_0$'ın reel sayılar olduğunu varsayalım.

Aşağıdaki denklem:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

için, tüm köklerin birim diskin içinde yer alması (yani $| \lambda | < 1$) için gerekli ve yeterli şart

$$|a_1| < 1 + a_0 < 2,$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.3 ([60], s.6)

a_2 , $a_1 \; ve \; a_0$'ın reel sayılar olduğunu varsayalım.

Aşağıdaki denklem:

$$\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

için, tüm köklerin birim diskin içinde yer alması (yani $| \lambda | < 1$) için gerekli ve yeterli şartlar şunlardır:

$$|a_2 + a_0| < 1 + a_1,$$

$$|a_2 - 3a_0| < 3 - a_1,$$

$$a_0^2 + a_1 - a_0 a_2 < 1.$$

3.2 TAM SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde, çalışmamızın önemli bir kısmını oluşturan bazı özel tam sayı dizileri tanıtılmaktadır. Bu dizilerin çeşitli özellikleri ve fark denklemleriyle olan ilişkileri literatürde farklı çalışmalarda ayrıntılı olarak incelenmiştir (bkz.[1,8,36,38,66-80]).

3.2.1 Fibonacci Sayıları:

Fibonacci sayıları, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilen ve aşağıdaki yineleme bağıntısı ile tanımlanan tam sayı dizisidir:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2. \tag{3.4}$$

Bu dizinin başlangıç koşulları $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ şeklindedir. Buna bağlı olarak, $F_2 = 1$ elde edilir. Fibonacci dizisi şu şekilde başlar:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8\ , 13\ , \cdots.$$

Fibonacci sayılarının ilk birkaç terimi **Tablo 3.1**'de verilmiştir.

Tablo 3.1 Fibonacci sayılarının bazı değerleri.

$\mathbf{F_0}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$\mathbf{F_4}$	$\mathbf{F_5}$	$\mathbf{F_6}$	$\mathbf{F_7}$	$\mathbf{F_8}$	$\mathbf{F_9}$	$\mathbf{F_{10}}$	$\mathbf{F_{11}}$	$\mathbf{F_{12}}$	$\mathbf{F_{13}}$	**...**
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	87	144	233	...

Ayrıca Fibonacci dizisi geriye doğru şu şekilde genişletilebilir:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

Genel bir homojen doğrusal yineleme bağıntısı aşağıdaki biçimdedir:

$$x_n = a_0 x_{n-1} + a_1 x_{n-2}\ + a_2 x_{n-3} + \cdots .. + a_{k-1} x_{n-k}, \qquad n \geq k, \tag{3.5}$$

burada $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ sabitlerdir ve $x_0, x_1, \dots, x_{n-k}$ başlangıç koşullarını belirler.

İkinci mertebe doğrusal bir yineleme ilişkisi ise

$$x_n = a_0 x_{n-1} + a_1 x_{n-2}, \qquad n \geq 2, \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu nedenle, F_n için Binet formülü şu şekilde verilir

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

olur ve kökler $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, şeklindedir.

Ayrıca, Fibonacci sayıları için kapalı form aşağıdaki gibidir:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{3.7}$$

burada α ve β, karakteristik denklem

İki ardışık Fibonacci sayısının oranı altın oranı verir. Bu oran, özellikle mühendislik, mimarlık ve fizik gibi alanlarda önemli uygulamalara sahiptir. Nitekim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha,$$

olduğu bilinmektedir; burada F_n, n'inci Fibonacci sayısını ifade eder.

3.2.2 Tribonacci sayıları:

[24]'te Tribonacci dizisi $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$, aşağıdaki

$$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n, \tag{3.8}$$

üçüncü mertebeden tekrarlama ilişkisi ile tanımlanır.Başlangıç koşulları

$$T_0 = 0, \qquad T_1 = 1, \qquad T_2 = 1,$$

olarak alındığında Tribonacci dizisinin ilk birkaç terimi şöyledir:

$$0, 0, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, \cdots.$$

Bu dizi Fibonacci sayılarının bir genellemesi olup, her terim kendisinden önce gelen üç terimin toplamıdır.

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, \quad n \geq 4.$$

Tribonacci dizisi negatif indekslere aşağıdaki bağıntı ile genişletilebilir:

$$T_{-n} = T_{-n+3} - T_{-n+2} - T_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(3.8)'in karakteristik denkleminin şu forma sahip olduğu açıkça görülebilir

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Bu denklemin kökleri şu şekildedir:

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3},$$

$$\beta = \frac{1 + \omega\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \omega^2\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3},$$

$$\gamma = \frac{1 + \omega^2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \omega\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}.$$

Burada

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

birliğin ilkel küp köküdür ve α Tribonacci sabiti olarak adlandırılır.

Tribonacci dizisi aşağıdaki Binet tipi formülle verilir:

$$T_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Ayrıca aşağıdaki limit geçerlidir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+r}}{T_n} = \alpha^r, \qquad r \in \mathbb{Z},$$

burada T_n, n-inci Tribonacci sayısını göstermektedir.

3.2.3 Genelleştirilmiş Tribonacci Sayıları:

[81]'de tanımlanan genelleştirilmiş Tribonacci dizisi $\{G_n\}_{n\geq 0}$ aşağıdaki yineleme bağıntısı ile karakterize edilir:

$$G_n = rG_{n-1} + sG_{n-2} + tG_{n-3}, \qquad n \geq 3, \tag{3.9}$$

başlangıç koşulları

$$G_0 = a, \qquad G_1 = b, \qquad G_2 = c,$$

olmak üzere burada a, b, c keyfi tamsayılar**,** r, s, t ise gerçel sayılardır**.**

Bu dizi birçok yazar tarafından ayrıntılı biçimde incelenmiştir; örneğin (bkz.[1,65,82-92]).

$\{G_n\}_{n\geq 0}$ dizisi, aşağıdaki şekilde negatif indisler için genişletilebilir:

$$G_{-n} = -\frac{s}{t}G_{-(n-1)} - \frac{r}{t}G_{-(n-2)} + \frac{1}{t}G_{-(n-3)}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots, \qquad t \neq 0.$$

Böylece yineleme bağıntısı tüm tamsayı n değerleri için geçerlidir.

Eğer

$$r = s = t = 1, \qquad G_0 = 0, \qquad G_1 = 1, \qquad G_2 = 1,$$

seçilirse dizi Tribonacci dizisi**,**

$$r = s = t = 1, \qquad G_0 = 3, \qquad G_1 = 1, \qquad G_2 = 3,$$

seçilirse dizi Tribonacci–Lucas dizisi olur.

Bu nedenle genelleştirilmiş Tribonacci dizisi ; Tribonacci, Tribonacci–Lucas, Padovan (Cordonnier), Perrin, Narayana, Padovan–Perrin, üçüncü dereceden Jacobsthal ve Jacobsthal–Lucas dizilerinin ortak bir genellemesi olarak kabul edilir.

Örneğin, literatürde, r , s , t ve başlangıç değerlerinin özel durumları için isimler ve notasyonlar (bkz. **Tablo 3.2**) kullanılmıştır.

Tablo 3.2 Genelleştirilmiş Tribonacci dizilerinin bir dizi değeri.

Diziler (Sayılar)	**Notasyon**
Tribonacci	$\{\mathrm{T_n}\} = \{\mathrm{V_n}(0,1,1;1,1,1)\}$
Tribonacci-Lucas	$\{\mathrm{I_n}\} = \{\mathrm{V_n}(3,1,3;1,1,1)\}$
Padovan (Cordonnier)	$\{\mathrm{C_n}\} = \{\mathrm{V_n}(1,1,1;0,1,1)\}$
Pell-Padovan	$\{\mathrm{R_n}\} = \{\mathrm{V_n}(1,1,1;0,2,1)\}$
Jacobsthal-Padovan	$\{\mathrm{B_n}\} = \{\mathrm{V_n}(1,1,1;0,1,2)\}$
Perrin	$\{\mathrm{Q_n}\} = \{\mathrm{V_n}(3,0,2;0,1,1)\}$
Pell-Perrin	$\{\mathrm{E_n}\} = \{\mathrm{V_n}(3,0,2;0,2,1)\}$
Jacobsthal-Perrin	$\{\mathrm{H_n}\} = \{\mathrm{V_n}(3,0,2;0,1,2)\}$
Padovan-Perrin	$\{\mathrm{O_n}\} = \{\mathrm{V_n}(0,0,1;0,1,1)\}$
Narayana	$\{\mathrm{N_n}\} = \{\mathrm{V_n}(0,1,1;1,0,1)\}$
Üçüncü dereceden Jacobsthal	$\{\mathrm{Y_n}\} = \{\mathrm{V_n}(0,1,1;1,1,2)\}$
Üçüncü dereceden Jacobsthal-Lucas	$\{\mathrm{Z_n}\} = \{\mathrm{V_n}(2,1,5;1,1,2)\}$

Yineleme ilişkisi üçüncü dereceden doğrusal fark denklemi olduğundan karakteristik denklemi

$$x^3 - r\,x^2 - s\,x - t = 0,$$

şeklindedir. Bunun kökleri

$$\alpha = \alpha(r, s, t) = \frac{r}{3} + A + B,$$

$$\beta = \beta(r, s, t) = \frac{r}{3} + \omega A + \omega^2 B,$$

$$\gamma = \gamma(r, s, t) = \frac{r}{3} + \omega^2 A + \omega B,$$

olup burada

$$A = \left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{1/3},$$

$$B = \left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{1/3},$$

$$\Delta = \Delta(r, s, t) = \frac{r^3 t}{27} - \frac{r^2 s^2}{108} + \frac{rst}{6} - \frac{s^3}{27} + \frac{t^2}{4},$$

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca

$$\alpha + \beta + \gamma = r,$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -s,$$

$$\alpha\beta\gamma = t,$$

özdeşlikleri sağlanır. Bundan sonra $\Delta(r, s, t) > 0$ olduğu varsayılır; böylece bir reel kök (α) ve birbirinin eşleniği olan iki kompleks kök elde edilir.

Bu durumda genelleştirilmiş Tribonacci dizisi tüm tamsayı n için aşağıdaki Binet tipi formülle ifade edilir :

$$G_n = \frac{P\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{Q\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{R\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}. \tag{3.10}$$

Burada

$$P = G_2 - (\beta+\gamma)G_1 + \beta\gamma G_0,$$

$$Q = G_2 - (\alpha+\gamma)G_1 + \alpha\gamma G_0,$$

$$R = G_2 - (\alpha+\beta)G_1 + \alpha\beta G_0.$$

Howard ve Saidak [93]'e göre bu ifade yalnızca pozitif indisler için değil, negatif indisler için de geçerlidir.

Negatif indisler için Binet formu

$$G_{-n} = \frac{\alpha^2 - r\alpha - s}{t}.\frac{P\alpha^{1-n}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^2 - r\beta - s}{t}.\frac{Q\beta^{1-n}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$
$$+\frac{\gamma^2 - r\gamma - s}{t}.\frac{R\gamma^{1-n}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

olur.

3.2.4 Tetranacci Sayıları:

Tetranacci dizisi $\{M_n\}_{n\geq 0}$ aşağıdaki dördüncü mertebeden doğrusal yineleme bağıntısı ile tanımlanır:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + M_{n-4}, \tag{3.11}$$

başlangıç koşulları

$$M_0 = 0, \qquad M_1 = 1, \qquad M_2 = 1, \qquad M_3 = 2.$$

Bu tanım kullanılarak dizi, negatif indekslere de genişletilebilir. Karakterizasyon yoluyla,

$$M_{-n} = -M_{-(n-1)} - M_{-(n-2)} - M_{-(n-3)} + M_{-(n-4)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

elde edilir.

Tetranacci sayılarının pozitif ve negatif indeksler için ilk birkaç değeri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 3.3 Negatif ve negatif olmayan indekslere sahip Tetranacci sayıları

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**...**
$\mathbf{M_n}$	0	1	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401	773	1490	...
$\mathbf{M_{-n}}$	0	0	0	1	-1	0	0	2	-3	1	0	4	-8	5	...

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0. \tag{3.12}$$

Dahası,

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 + \frac{13}{4}\omega^{-1}},$$

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 + \frac{13}{4}\omega^{-1}},$$

$$\gamma = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 - \frac{13}{4}\omega^{-1}},$$

$$\delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 - \frac{13}{4}\omega^{-1}}.$$

Burada

$$\omega = \sqrt{\frac{11}{12} + \left(\frac{-65}{54} + \sqrt{\frac{563}{108}}\right)^{1/3} + \left(\frac{-65}{54} - \sqrt{\frac{563}{108}}\right)^{1/3}}.$$

Tüm $n \in \mathbb{Z}$ için Tetranacci sayıları Binet tipi kapalı form ile ifade edilebilir. Bu bağlamda,

$$M_n = \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)} + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)} + \frac{\delta^{n+2}}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)},$$

(bkz. [94,95])

veya eşdeğer olarak

$$M_n = \frac{\alpha-1}{5\alpha-8}\alpha^{n-1} + \frac{\beta-1}{5\beta-8}\beta^{n-1} + \frac{\gamma-1}{5\gamma-8}\gamma^{n-1} + \frac{\delta-1}{5\delta-8}\delta^{n-1},$$

(bkz. [96])

burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aşağıdaki karakteristik denklemin kökleridir.

Aşağıdaki özdeşliklere sahip olduğumuzu unutmayın:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1,$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = -1,$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 1,$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = -1.$$

Ayrıca Tetranacci sayıları için aşağıdaki limitler mevcuttur:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+i}}{M_n} = \alpha^i \quad ve \quad \lim_{n\to\infty} \frac{M_{-(n+i)}}{M_{-n}} = \frac{1}{\beta^i}, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{3.13}$$

3.2.5 Padovan Sayıları:

Başlangıç değerleriyle tanımlanan tam sayı dizisi $\{D_n\}$, Padovan dizisi olarak bilinir.

Padovan sayıları

$$D_0 = 1, \qquad D_1 = 1, \qquad D_2 = 1,$$

başlangıç değerleri ile ve aşağıdaki yineleme bağıntısı ile tanımlanır:

$$D_n = D_{n-2} + D_{n-3}, \qquad n \geq 3. \tag{3.14}$$

Padovan dizisinin ilk birkaç terimi şöyledir:

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, \cdots.$$

(3.14)'ün karakteristik denklemi

$$x^3 - x - 1 = 0,$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri α, β, γ ile gösterilsin.

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}\right)^{1\backslash 3} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}\right)^{1\backslash 3},$$

$$\beta = \omega\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}\right)^{1\backslash 3} + \omega^2\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}\right)^{1\backslash 3},$$

$$\gamma = \omega^2\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}\right)^{1\backslash 3} + \omega\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}\right)^{1\backslash 3},$$

burada $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ birliğin ilkel küp köküdür.

Buradaki $\alpha \approx 1.32471795724$ sayısı plastik sayı (plastik sabit / plastic constant) olarak adlandırılır.

Ayrıca aşağıdaki limit geçerlidir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \alpha,$$

burada D_n, n-inci Padovan sayısını ifade eder.

Padovan dizisi adını İtalyan mimar *Richard Padovan*'dan alır. *Richard Padovan*, 1994 yılında yayımlanan çalışmasında diziyi Hollandalı mimar *Hans* van der *Laan'*a atfetmiştir. Daha sonra *Ian Stewart* bu diziye 1996 yılında *Scientific American* dergisindeki köşesinde yer vererek yaygınlaştırmıştır. Altın oran Fibonacci dizisi ile ilişkili olduğu gibi, Padovan sayıları da plastik sayı ile ilişkilidir ve ardışık iki Padovan sayısının oranı plastik sayıya yakınsar. Ayrıca dizi literatürde Cordonnier dizisi olarak da bilinmektedir (ilk olarak Gérard Cordonnier tarafından 1924'te ele alınmıştır) [8,74].

Padovan dizisi negatif indekslere de genişletilebilir. Yineleme bağıntısı kullanılarak

$$D_{-n} = -D_{-(n-1)} + D_{-(n-3)}, \qquad n = 1,2,3, \ldots,$$

elde edilir.

Tablo 3.4 Negatif Padovan sayılarının bazı değerleri.

...	$\mathbf{D_{-11}}$	$\mathbf{D_{-10}}$	$\mathbf{D_{-9}}$	$\mathbf{D_{-8}}$	$\mathbf{D_{-7}}$	$\mathbf{D_{-6}}$	$\mathbf{D_{-5}}$	$\mathbf{D_{-4}}$	$\mathbf{D_{-3}}$	$\mathbf{D_{-2}}$	$\mathbf{D_{-1}}$	$\mathbf{D_0}$	$\mathbf{D_1}$	$\mathbf{D_2}$	...
...	-2	2	-1	0	1	-1	1	0	0	1	0	1	1	1	...

3.2.6 Genelleştirilmiş Padovan Sayıları:

Padovan dizisinin bir uzantısı olan genelleştirilmiş Padovan dizisi $\{D_n\}$, başlangıç koşulları

$$S_{-2} = 0, \qquad S_{-1} = 0, \qquad S_0 = 1,$$

olmak üzere.

Aşağıdaki yineleme bağıntısı ile tanımlanır:

$$S_n = p\, S_{n-2} + q\, S_{n-3}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Burada p ve q keyfi reel sabitlerdir.

(3.15)'in karakteristik denklemi

$$x^3 - px - q = 0,$$

şeklindedir. Bu kübik denklemin kökleri ϕ, φ, ψ ile gösterilirse Cardano çözümü kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$\phi = \frac{R^2 + 12p}{6R},$$

$$\varphi = -\frac{R^2 + 12p}{12R} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{R}{6} - \frac{2p}{R}\right),$$

$$\psi = -\frac{R^2 + 12p}{12R} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{R}{6} - \frac{2p}{R}\right).$$

Burada

$$R = \sqrt[3]{108q \; + \; 12\sqrt{-12p^3 \; + 81q^2}\,.}$$

Ayrıca aşağıdaki limit bağıntısı geçerlidir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \phi\,,$$

burada S_n, n-inci genelleştirilmiş Padovan sayısını göstermektedir.

Genelleştirilmiş Padovan sayıları ve bunların özellikleri literatürde birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir (bkz. [21,97-100]).

3.2.7 Horadam Sayıları:

Fibonacci dizisinin bir genellemesi olan Horadam dizisi $\left(W_n(a,b;\ p\ ,q)\right)_{n\geq 0}$ veya kısaca, $(W_n)_{n\geq 0}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$W_n = pW_{n-1} + qW_{n-2}, \qquad n \geq 2, \tag{3.16}$$

başlangıç koşulları ise

$$W_0 = a, \qquad W_1 = b,$$

şeklindedir. Burada a, b, p ve q keyfî reel sayılardır.

(3.16)'nın karakteristik denklemi

$$x^2 - px - q = 0,$$

şeklindedir ve bu denklemin kökleri

$$\lambda = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \qquad ve \qquad \mu = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2},$$

olur.

Ayrıca aşağıdaki limit özelliği sağlanır:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = \lambda\ .$$

Burada W_n , n'inci Horadam sayısını ifade eder.

3.2.8 Lucas Sayıları:

Fibonacci dizisi ile Lucas dizisi, her terimin kendisinden önce gelen iki terimin toplamı ile elde edildiği benzer bir yinelemeli ilişkiye sahiptir. Lucas dizisinin ilk iki terimi

$$L_0 = 2, \qquad L_1 = 1,$$

şeklindedir.

Lucas sayıları aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$L_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ L_{n-1} + L_{n-2} & n > 1. \end{cases} \tag{3.17}$$

Bu dizinin ilk bazı terimleri şunlardır:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, \ldots.$$

Ayrıca negatif indeksler için aşağıdaki ilişki geçerlidir:

$$L_{n-2} = L_n - L_{n-1},$$

ve negatif terimler

$$L_{-n} = (-1)^n L_n,$$

şeklinde ifade edilir.

3.2.9 Pell Sayıları:

Tekrarlama ilişkisi aşağıdaki gibi verilen diziye Pell sayıları denir:

$$P_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ 2P_{n-1} + P_{n-2}, & \mathrm{n} \geq 2. \end{cases} \tag{3.18}$$

Pell sayıları 0 ve 1 ile başlar ve her bir sonraki terim, kendisinden önce gelen iki terimin belirli bir lineer kombinasyonu ile elde edilir. Dizinin ilk birkaç terimi şu şekildedir:

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \ldots.$$

Pell sayılarının kapalı formu aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Hem Pell hem de Fibonacci sayıları, gümüş oran olarak bilinen $(1+\sqrt{2})$'nin kuvvetlerine orantılı olarak üssel biçimde artar. Pell sayıları kare üçgen sayılarının elde edilmesinde, bazı kombinatoryal problemlerin çözümünde ve $\sqrt{2}$'nin yaklaşık değerinin hesaplanmasında önemli rol oynar. Pell dizisi literatürde geniş bir şekilde incelenmiştir (bkz.[25,26,77,80,84, 97,98,101,102]).
Daha yüksek mertebeden Pell dizileri için (bkz. [34,36,44,103,104]).

Üçüncü dereceden Pell dizisi $\{P_n\}_{n\geq 0}$ ise aşağıdaki yineleme bağıntısı ile tanımlanır:

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} + P_{n-3},$$

başlangıç koşulları

$$P_0 = 0, \qquad P_1 = 1, \qquad P_2 = 2.$$

Negatif indeksler için dizi şu şekilde genişletilebilir:

$$P_{-n} = -P_{-(n-1)} - 2P_{-(n-2)} + P_{-(n-3)}.$$

Bu dizinin karakteristik denklemi

$$x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0,$$

şeklindedir. Bu kübik denklemin kökleri α, β, γ ile gösterilsin. Bunlar sırasıyla

$$\alpha = \frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{1\backslash 3} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{1\backslash 3},$$

$$\beta = \frac{2}{3} + \omega\left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{1\backslash 3} + \omega^2\left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{1\backslash 3},$$

$$\gamma = \frac{2}{3} + \omega^2\left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{1\backslash 3} + \omega\left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{1\backslash 3},$$

şeklindedir. Burada

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

birliğin ilkel küp köküdür ve reel kökün α olduğu görülmektedir.

Ayrıca kökler aşağıdaki temel bağıntıları sağlar:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\,,$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1\,,$$

$$\alpha\beta\gamma = 1\,.$$

3.2.10 Pell-Lucas Sayıları:

Tekrarlama ilişkisi aşağıdaki gibi verilen diziye Pell–Lucas sayıları (veya eşlik eden Pell sayıları) denir:

$$U_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 2, & n = 1, \\ 2U_{n-1} + U_{n-2}, & \text{n} \geq 2. \end{cases} \tag{3.19}$$

Dizinin ilk iki terimi 2 olup, her yeni terim önceki Pell–Lucas sayısının iki katı ile bir önceki terimin toplamı şeklinde elde edilir.

Pell–Lucas sayıları aşağıdaki kapalı form ile ifade edilir:

$$U_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n.$$

3.2.11 Narayana Sayıları:

Hintli matematikçi Narayana, belirli bir inek–buzağı popülasyonu modeli üzerine yaptığı çalışmalarda bugün Narayana sayıları olarak bilinen diziyi ortaya koymuştur.

Narayana'nın inek problemi şu şekilde ifade edilir:

Bir inek her yıl bir buzağı doğurur ve her buzağı, doğumundan dördüncü yıldan itibaren her yılın başında bir buzağı doğurmaya başlar. Buna göre, 20 yıl sonra kaç inek olacağı sorusu araştırılır [8].

Bu problem aşağıdaki tekrarlama ilişkisi ile karakterize edilir:

$$N_{n+3} = N_{n+2} + N_n, \qquad n \geq 0, \tag{3.20}$$

başlangıç koşulları

$$N_0 = 0, \qquad N_1 = 1, \qquad N_2 = 1.$$

Dizi negatif indeksler için aşağıdaki şekilde genişletilebilir:

$$N_{-n} = -N_{-(n-2)} + N_{-(n-3)}.$$

Bu dizi pozitif tam sayılardan oluşur ve dizinin ilk bir kaç terimi:

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, \cdots,$$

(bkz. [105]).

Tablo 3.5 Narayana sayılarının bazı değerleri.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**...**
$\mathbf{N_n}$	0	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	...
$\mathbf{N_{-n}}$		0	1	0	-1	1	1	-2	0	3	-2	-3	5	1	...

Narayana sayıları tüm n tam sayıları için Binet tipi bir kapalı form ile ifade edilebilir (bkz. [106]). Dizinin karakteristik denklemi

$$x^3 - x^2 - 1 = 0,$$

şeklindedir.

Bu kübik denklemin kökleri α, β, γ olmak üzere:

$$\alpha = \frac{1}{3} + \left(\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1\backslash 3} + \left(\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1\backslash 3},$$

$$\beta = \frac{1}{3} + \omega\left(\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1\backslash 3} + \omega^2\left(\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1\backslash 3},$$

$$\gamma = \frac{1}{3} + \omega^2\left(\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1\backslash 3} + \omega\left(\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}\right)^{1\backslash 3},$$

şeklindedir. Burada

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

birliğin ilkel küp köküdür.

Ayrıca kökler aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\,,$$

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0$,

$\alpha\beta\gamma = 1$.

3.2.12 Jacobsthal Sayıları:

Jacobsthal sayıları aşağıdaki yineleme bağıntısı ile tanımlanır:

$$J_n = J_{n-1} + 2\,J_{n-2}, \qquad n \geq 2, \tag{3.21}$$

başlangıç koşulları

$$J_0 = 0, \qquad J_1 = 1.$$

Bu dizi dizinin ilk bir kaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, \cdots.$$

3.2.13 Jacobsthal-Lucas Sayıları:

Jacobsthal dizisinin bir benzeri olan Jacobsthal–Lucas sayıları şu şekilde tanımlanır:

$$j_n = j_{n-1} + 2\,j_{n-2}\ , \qquad n \geq 2, \tag{3.22}$$

başlangıç koşulları

$$j_0 = 2, \qquad j_1 = 1.$$

Bu dizinin ilk birkaç terimi:

$$2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, \cdots.$$

3.2.14 Perrin Sayıları:

Perrin sayıları aşağıdaki tekrarlama ilişkisi ile karakterize edilir:

$$Q_n = Q_{n-2} + Q_{n-3}, \qquad n \geq 3, \tag{3.23}$$

başlangıç koşulları

$$Q_0 = 3, \qquad Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 2.$$

Perrin dizisinin ilk birkaç terimi:

$$3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, \cdots.$$

3.2.15 Genelleştirilmiş Jacobsthal-Padovan Sayıları:

Genelleştirilmiş Jacobsthal-Padovan dizisi $\{V_n\}_{n\geq 0} = \{V_n(V_0, V_1, V_2)\}_{n\geq 0}$, üçüncü mertebeden yineleme bağıntısı ile tanımlanır:

$$V_n = V_{n-2} + 2V_{n-3}, \qquad n \geq 3, \tag{3.24}$$

başlangıç koşulları

$$V_0 = c_0, \quad V_1 = c_1, \quad V_{\ 2} = c_2,$$

olup $c_0, c_1, c_2 \neq 0$ olabilir.

Bu dizi negatif alt indisli terimleri de kapsayacak şekilde aşağıdaki biçimde genişletilebilir:

$$V_{-n} = -\frac{1}{2}V_{-(n-1)} + \frac{1}{2}V_{-(n-3)}, \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.25}$$

Dolayısıyla, (3.24) ve (3.25) bağıntıları tüm tamsayı n değerleri için geçerlidir.

Bu yineleme bağıntısına karşılık gelen karakteristik denklem

$$x^3 - x - 2 = 0,$$

şeklindedir. Bu kübik denklemin kökleri α, β, γ olmak üzere

$$\alpha = \left(1 + \frac{\sqrt{78}}{9}\right)^{1\backslash 3} + \left(1 - \frac{\sqrt{78}}{9}\right)^{1\backslash 3},$$

$$\beta = \omega\left(1 + \frac{\sqrt{78}}{9}\right)^{1\backslash 3} + \omega^2\left(1 - \frac{\sqrt{78}}{9}\right)^{1\backslash 3},$$

$$\gamma = \omega^2\left(1 + \frac{\sqrt{78}}{9}\right)^{1\backslash 3} + \omega\left(1 - \frac{\sqrt{78}}{9}\right)^{1\backslash 3}.$$

Burada

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

birliğin ilkel küp köküdür.

Kökler aşağıdaki özdeşlikleri sağlar:

$\alpha + \beta + \gamma = 0$,

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1$,

$\alpha\beta\gamma = 2$.

3.2.16 Ayarlanmış Jacobsthal-Padovan Sayıları:

Şimdi, genelleştirilmiş Jacobsthal-Padovan dizisinin özel bir durumu ele alınsın. Ayarlanmış Jacobsthal–Padovan dizisi $\{K_n\}_{n\geq 0}$, aşağıdaki üçüncü dereceden yineleme bağıntısı ile tanımlanır:

$$K_{n+3} = K_{n+1} + 2\,K_n, \tag{3.26}$$

başlangıç koşulları

$$K_0 = 0, \qquad K_1 = 1, \qquad K_2 = 0.$$

Bu dizi negatif alt indisli değerlere de aşağıdaki bağıntı ile genişletilebilir:

$$K_{-n} = -\frac{1}{2}K_{-(n-1)} + \frac{1}{2}K_{-(n-3)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dolayısıyla bu yineleme ilişkileri tüm tamsayı n değerleri için geçerlidir. Daha fazla bilgi için (bkz. [101,103,107,108]).

Pozitif ve negatif alt indisli ayarlanmış Jacobsthal–Padovan sayılarının bazı ilk değerleri **Tablo 3.6**'da verilmiştir.

Tablo 3.6 Pozitif ve negatif alt indisli ayarlanmış Jacobsthal–Padovan sayılarının bazı değerleri

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**...**
$\mathbf{K_n}$	0	1	0	1	2	1	4	5	6	13	16	25	42	57	...
$\mathbf{K_{-n}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{7}{32}$	$\frac{11}{64}$	$\frac{1}{128}$	$-\frac{29}{256}$	$\frac{73}{512}$	$-\frac{69}{1024}$	$-\frac{47}{2048}$	$\frac{339}{4096}$	...

4. BULGULAR

Bu bölümde, çözümleri Tetranacci sayılarıyla ilişkili olan dört rasyonel fark denklemi ile birlikte, beş periyotlu iki fark denklemi incelenmiştir.

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.1}$$

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} + 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.2}$$

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} - 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.3}$$

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} + 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.4}$$

$$x_{n+1} = \frac{-1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} + x_{n-1} + 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots, \tag{4.5}$$

$$x_{n+1} = \frac{-1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} + 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, \cdots. \tag{4.6}$$

Bu bölümde ele alınan fark denklemlerinin çözümleri Tetranacci sayılarıyla yakından ilişkilidir. Çalışmamızın temel amacı, dört adet Tetranacci ile ilişkili rasyonel fark denklemi ve iki adet 5-periyotlu fark denkleminin çözümleri ile Tetranacci sayıları arasındaki bağlantıları ortaya koymak ve ayrıca Tetranacci sabiti ile bu denklemlerin denge noktaları arasındaki ilişkileri incelemektir.

Bu bağlamda, söz konusu fark denklemlerine ilişkin temel sonuçlar sunulmakta; bu denklemlerin açık formdaki genel çözümleri ile çözümlerinin asimptotik davranışları ayrıntılı olarak araştırılmaktadır.

4.1 Fark Denklemi (4.1)

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1}$$

ile verilen (4.1) denklemi ele alınacak ve bu denklemin çözümlerinin dinamik davranışı analiz edilecektir.

Teorem 4.1

$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$dizisinin (4.1) denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım.

Bu durumda, $n = 0,1,2, \ldots$ için $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözüm dizisinin genel terimi aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$x_n = \frac{M_{-(n+1)}x_0x_{-1}x_{-2} + \left(M_{-n} - M_{-(n+1)}\right)x_0x_{-1} + \left(M_{-(n+2)} + M_{-(n+3)}\right)x_0 + M_{-(n+2)}}{M_{-(n+2)}x_0x_{-1}x_{-2} + \left(M_{-(n+1)} - M_{-(n+2)}\right)x_0x_{-1} + \left(M_{-(n+3)} + M_{-(n+4)}\right)x_0 + M_{-(n+3)}}. \tag{4.7}$$

Burada M_n, n'inci Tetranacci sayısını göstermektedir ve başlangıç koşulları

$$M_0 = 0\,, \qquad M_1 = 0\,, \qquad M_2 = 1\,, \qquad M_3 = 1,$$

şeklindedir. Ayrıca başlangıç değerleri $(x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus F_1$ olmak üzere, F_1 kümesi (4.1) denkleminin yasak kümesi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_1 = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \left\{ (x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{r} M_{-(n+2)}x_0x_{-1}x_{-2} + \left(M_{-(n+1)} - M_{-(n+2)}\right)x_0x_{-1} \\ +\left(M_{-(n+3)} + M_{-(n+4)}\right)x_0 + M_{-(n+3)} = 0 \end{array} \right\}.$$

İspat.

Bu sonucun ispatını göstereceğiz. Bu amaçla $n = 0,1,2, \ldots$ olsun.

$$n = 0 \implies x_1 = \frac{1}{x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} - x_0 - 1},$$

$$n = 1 \implies x_2 = \frac{x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} - x_0 - 1}{-x_0x_{-1}x_{-2} + 2x_0x_{-1}},$$

$$n = 2 \implies x_3 = \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + 2x_0x_{-1}}{-x_0x_{-1} + 2x_0},$$

$$n = 3 \implies x_4 = \frac{-x_0 x_{-1} + 2x_0}{-x_0 + 2},$$

$$n = 4 \implies x_5 = \frac{-x_0 + 2}{2x_0 x_{-1} x_{-2} - 2x_0 x_{-1} - 2x_0 - 3},$$

$$n = 5 \implies x_6 = \frac{2x_0 x_{-1} x_{-2} - 2x_0 x_{-1} - 2x_0 - 3}{-3x_0 x_{-1} x_{-2} + 5x_0 x_{-1} + x_0 + 1},$$

$$n = 6 \implies x_7 = \frac{-3x_0 x_{-1} x_{-2} + 5x_0 x_{-1} + x_0 + 1}{x_0 x_{-1} x_{-2} - 4x_0 x_{-1} + 4x_0},$$

$$n = 7 \implies x_8 = \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} - 4x_0 x_{-1} + 4x_0}{+x_0 x_{-1} - 4x_0 + 4},$$

$$n = 8 \implies x_9 = \frac{+x_0 x_{-1} - 4x_0 + 4}{4x_0 x_{-1} x_{-2} - 4x_0 x_{-1} - 3x_0 - 8},$$

$$n = 9 \implies x_{10} = \frac{4x_0 x_{-1} x_{-2} - 4x_0 x_{-1} - 3x_0 - 8}{-8x_0 x_{-1} x_{-2} + 12x_0 x_{-1} + 4x_0 + 5},$$

$$\vdots$$

Böylece, dördüncü dereceden tekrarlama ilişkisi (3.11) esas alınarak ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2

Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) (4.1) denkleminin denge noktaları $\overline{x}_1 = \alpha$ ve $\overline{x}_2 = \beta$ 'dır.

(ii) (4.1) denklemi, tek bir pozitif denge noktasına sahiptir; bu denge noktası $\overline{x}_1 = \alpha$ olup α itici (püskürtücü) bir noktadır.

(iii) (4.1) denklemi, tek bir negatif denge noktasına sahiptir; bu denge noktası $\overline{x}_2 = \beta$ olup β yerel asimptotik kararlı bir noktadır.

İspat.

(i) (4.1) denkleminin denge noktaları, denge koşulu sağlanarak elde edilir.

$$\overline{x} = \frac{1}{\overline{x}\,(\overline{x}\,\overline{x} - \overline{x} - 1) - 1},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}\,(\bar{x}^{\,2} - \bar{x} - 1) - 1},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}^{\,3} - \bar{x}^{\,2} - \bar{x} - 1},$$

$$\bar{x}^{\,4} - \bar{x}^{\,3} - \bar{x}^{\,2} - \bar{x} = 1.$$

Aşağıdaki dördüncü dereceden denklemi elde ederiz

$$\bar{x}^{\,4} - \bar{x}^{\,3} - \bar{x}^{\,2} - \bar{x} - 1 = 0. \qquad (4.8)$$

Bu denklem, (3.12)'de verilen Tetranacci sayılarının yineleme bağıntısına karşılık gelen karakteristik denklemdir:

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0. \qquad (3.12)$$

Dördüncü dereceden (4.8) denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\omega + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 + \frac{13}{4}\,\omega^{-1}},$$

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\omega - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 + \frac{13}{4}\,\omega^{-1}},$$

$$\gamma = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\omega + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 - \frac{13}{4}\,\omega^{-1}},$$

$$\delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\omega - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 - \frac{13}{4}\,\omega^{-1}}.$$

Burada α , β , γ ve δ , karakteristik denklemin kökleridir.

ω sayısı aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\omega = \sqrt{\frac{11}{12} + \left(\frac{-65}{54} + \sqrt{\frac{563}{108}}\right)^{1/3} + \left(\frac{-65}{54} - \sqrt{\frac{563}{108}}\right)^{1/3}}\,.$$

Sayısal olarak:

$$\omega = \sqrt{0.916667 + (-1.203704 + 2.283192)^{1/3} + (-1.203704 - 2.283192)^{1/3}}$$

$$= \sqrt{0.916667 + 1.025824 - 1.516397} = \sqrt{0.426094} = 0.652759 .$$

$$\omega^2 = 0.426094 .$$

$$\omega^{-1} = 1.531959 .$$

Köklerin sayısal değerleri hesaplayalım:

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\omega + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 + \frac{13}{4}\,\omega^{-1}}$$

$$= 0.25 + 0.326380 + \frac{1}{2}\sqrt{2.75 - 0.426094 + 4.978867}$$

$$= 0.25 + 0.326380 + 1.351182 = 1.927562 .$$

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\omega - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 + \frac{13}{4}\,\omega^{-1}}$$

$$= 0.25 + 0.326380 - 1.351182 = -0.774804 .$$

$$\gamma = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\omega + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 - \frac{13}{4}\,\omega^{-1}}$$

$$= 0.25 - 0.326380 + \frac{1}{2}\sqrt{2.75 - 0.426094 - 4.978867}$$

$$= 0.25 - 0.326380 + 0.814704\,i = -0.076379 + 0.814704\,i .$$

$$\delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\omega - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{4} - \omega^2 - \frac{13}{4}\,\omega^{-1}}$$

$$= 0.25 - 0.326380 - 0.814704\,i = -0.076379 - 0.814704\,i .$$

Bu kökler aşağıdaki Vieta bağıntılarını sağlar:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1,$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = -1,$$

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 1,$$

$$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta = -1.$$

Buna ek olarak, aşağıdaki limit bağıntısı elde edilmektedir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{-(n+i)}}{M_{-n}} = \frac{1}{\beta^i}. \qquad (3.13)$$

Buna göre, (4.1) denklemine ait iki adet denge noktası bulunmaktadır:

$\bar{x}_1 = \alpha = 1.927562$ (pozitif denge noktası),

$\bar{x}_2 = \beta = -0.774804$ (negatif denge noktası).

(ii) Şimdi, (4.1) denkleminin tek bir pozitif denge noktası $\bar{x}_1 = \alpha = 1.927562$ sahip olduğunu ve α'nın itici (püskürtücü) bir nokta olduğunu gösterelim.

I 'nin reel sayılardan oluşan bir aralık olduğunu ve

$f : I^3 \to I$

aşağıdaki şekilde tanımlanan sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x(yz-y-1)-1}. \tag{4.9}$$

Bu nedenle, şu sonuç çıkar:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{-yz+y+1}{(\,x(yz-y-1)-1\,)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{-xz+x}{(\,x(yz-y-1)-1\,)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{-xy}{(\,x(yz-y-1)-1\,)^2}.$$

Daha sonra, (4.8)'den

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_1)}{\partial x} = \frac{-\bar{x}_1{}^2+\bar{x}_1+1}{(\bar{x}_1(\bar{x}_1{}^2-\bar{x}_1-1)-1\,)^2}$$

$$= \frac{-\alpha^2+\alpha+1}{(\alpha(\alpha^2-\alpha-1)-1\,)^2}$$

$$= \frac{-\alpha^2+\alpha+1}{(\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1\,)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{-\alpha-1}{\alpha^2}}{\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2}$$

$$= -\alpha - 1 ,$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1)}{\partial y} = \frac{-{\bar{x}_1}^2 + \bar{x}_1}{(\bar{x}_1({\bar{x}_1}^2 - \bar{x}_1 - 1) - 1)^2}$$

$$= \frac{-\alpha^2 + \alpha}{(\alpha(\alpha^2 - \alpha - 1) - 1)^2}$$

$$= \frac{-\alpha^2 + \alpha}{(\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{-\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha^2}}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}$$

$$= -\alpha^2 - \alpha - 1 ,$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1)}{\partial z} = \frac{-{\bar{x}_1}^2}{(\bar{x}_1({\bar{x}_1}^2 - \bar{x}_1 - 1) - 1)^2}$$

$$= \frac{-\alpha^2}{(\alpha(\alpha^2 - \alpha - 1) - 1)^2}$$

$$= \frac{-\alpha^2}{(\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1)^2}$$

$$= \frac{-\alpha^2}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}$$

$$= -\alpha^4,$$

ve (4.1) denkleminin $\bar{x}_1 = \alpha = 1.927562$ denge noktası civarındaki doğrusallaştırılmış denklemi aşağıdaki gibidir:

$$z_{n+1} = -(\alpha + 1)z_n - (\alpha^2 + \alpha + 1)z_{n-1} - (\alpha^4)z_{n-2}.$$

Bu denklem, eşdeğer olarak

$$z_{n+1} + p\, z_n + q\, z_{n-1} + r\, z_{n-2} = 0,$$

şeklinde de yazılabilir.

Burada katsayılar

$$p = \alpha + 1 = 2.927562,$$

$$q = \alpha^2 + \alpha + 1 = 6.643057,$$

$$r = \alpha^4 = 13.804905,$$

şeklindedir.

Dolayısıyla, bu doğrusal fark denklemine karşılık gelen karakteristik denklem:

$$\lambda^3 + 2.927562\,\lambda^2 + 6.643057\lambda + 13.804905 = 0,$$

olarak elde edilir.

Karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_2 = \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_3 = \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 'ye dikkat edin ve

$$A = q - \frac{p^2}{3}$$

$$= 6.643057 - \frac{(2.927562)^2}{3}$$

$$= 6.643057 - 2.856873 = 3.786184\,.$$

$$B = r - \frac{pq}{3} + \frac{2}{27}p^3$$

$$= 13.804905 - \frac{(2.927562)(6.643057)}{3} + \frac{2}{27}(2.927562)^3$$

$$= 13.804905 - 6.482654 + 1.858594 = 9.180845\,.$$

Değerleri köklere yerleştirdikten sonra

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + \sqrt{(9.180845)^2 + \frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-9.180845 - \sqrt{(9.180845)^2 + \frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}} - \frac{2.927562}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + \sqrt{92.328754}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-9.180845 - \sqrt{92.328754}}{2}} - \frac{2.927562}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + 9.608785}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-9.180845 - 9.608785}{2}} - \frac{2.927562}{3}$$

$$= 0.598115 - 2.110065 - 0.975854$$

$$= -2.487804,$$

$$\lambda_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + \sqrt{(9.180845)^2 + \frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-9.180845 - \sqrt{(9.180845)^2 + \frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}} - \frac{2.927562}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + \sqrt{92.328754}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845-\sqrt{92.328754}}{2}}-\frac{2.927562}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845+9.608785}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845-9.608785}{2}}-\frac{2.927562}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.598115)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2.110065)-0.975854$$

$$=-0.299058+0.517983\,i+1.055033+1.827370\,i-0.975854$$

$$=-0.219879+2.345353\,i,$$

$$\lambda_3=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845+\sqrt{(9.180845)^2+\frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845-\sqrt{(9.180845)^2+\frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}}-\frac{2.927562}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845+\sqrt{92.328754}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845-\sqrt{92.328754}}{2}}-\frac{2.927562}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845+9.608785}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845-9.608785}{2}}-\frac{2.927562}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.598115)+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2.110065)-0.975854$$

$$=-0.299058-0.517983\,i+1.055033-1.827370\,i-0.975854$$

$$=-0.219879-2.345353\,i,$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$|\lambda_1| = |-2.487804| = 2.487804 > 1,$$

$$|\lambda_2| = |-0.219879 + 2.345353\, i| = \sqrt{(-0.219879)^2 + (2.345353)^2}$$

$$= \sqrt{0.048347 + 5.500681} = \sqrt{5.549028} = 2.355638 > 1,$$

$$|\lambda_3| = |-0.219879 - 2.345353\, i| = \sqrt{(-0.219879)^2 + (-2.345353)^2}$$

$$= \sqrt{0.048347 + 5.500681} = \sqrt{5.549028} = 2.355638 > 1\,.$$

Dolayısıyla, pozitif denge noktası $\bar{x}_1 = \alpha$ iticidir (püskürtücüdür) ve bu ispatı tamamlar.

(iii) Şimdi, (4.1) denkleminin tek bir negatif denge noktası $\bar{x}_2 = \beta = -0.774804$ sahip olduğunu ve β'nın yerel asimptotik kararlı bir nokta olduğunu gösterelim.

Benzer şekilde, (4.9) kullanılarak (4.1) denkleminin denge noktası $\bar{x}_2 = \beta$ etrafındaki doğrusallaştırılmış denklem aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$z_{n+1} + p\, z_n + q\, z_{n-1} + r\, z_{n-2} = 0\,.$$

Burada katsayılar

$$p = \beta + 1 = 0.225196,$$

$$q = \beta^2 + \beta + 1 = 0.825517,$$

$$r = \beta^4 = 0.360386,$$

şeklindedir.

Dolayısıyla, bu doğrusal fark denklemine karşılık gelen karakteristik denklem**:**

$$\lambda^3 + 0.225196\,\lambda^2 + 0.825517\,\lambda + 0.360386 = 0,$$

olarak elde edilir.

Karakteristik denklemin kökleri.

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_2 = \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_3 = \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 'ye dikkat edin ve

$$A = q - \frac{p^2}{3}$$

$$= 0.825517 - \frac{(0.225196)^2}{3}$$

$$= 0.825517 - 0.016905 = 0.808612\,.$$

$$B = r - \frac{pq}{3} + \frac{2}{27}p^3$$

$$= 0.360386 - \frac{(0.225196)(0.825517)}{3} + \frac{2}{27}(0.225196)^3$$

$$= 0.360386 - 0.061968 + 0.000846 = 0.299264\,.$$

Değerleri köklere yerleştirdikten sonra

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + \sqrt{(0.299264)^2 + \frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-0.299264 - \sqrt{(0.299264)^2 + \frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}} - \frac{0.225196}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + \sqrt{0.167887}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-0.299264 - \sqrt{0.167887}}{2}} - \frac{0.225196}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + 0.409740}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-0.299264 - 0.409740}{2}} - \frac{0.225196}{3}$$

$$= 0.380843 - 0.707739 - 0.075065$$

$$= -0.401961,$$

$$\lambda_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + \sqrt{(0.299264)^2 + \frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.299264 - \sqrt{(0.299264)^2 + \frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}} - \frac{0.225196}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + \sqrt{0.167887}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264-\sqrt{0.167887}}{2}}-\frac{0.225196}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264+0.409740}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264-0.409740}{2}}-\frac{0.225196}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.380843)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.707739)-0.075065$$

$$=-0.190422+0.329820\,i+0.353870+0.612920\,i-0.075065$$

$$=0.088383+0.94274\,i,$$

$$\lambda_3=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264+\sqrt{(0.299264)^2+\frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264-\sqrt{(0.299264)^2+\frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}}-\frac{0.225196}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264+\sqrt{0.167887}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264-\sqrt{0.167887}}{2}}-\frac{0.225196}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264+0.409740}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264-0.409740}{2}}-\frac{0.225196}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.380843)+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.707739)-0.075065$$

$$=-0.190422-0.329820\,i+0.353870-0.612920\,i-0.075065$$

$$=0.088383-0.94274\,i$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$|\lambda_1| = |-0.401961| = 0.401961 < 1,$$

$$|\lambda_2| = |0.088383 + 0.94274\, i| = \sqrt{(0.088383)^2 + (0.94274)^2}$$

$$= \sqrt{0.007812 + 0.888759} = \sqrt{0.896571} = 0.946874 < 1,$$

$$|\lambda_3| = |0.088383 - 0.94274\, i| = \sqrt{(0.088383)^2 + (-0.94274)^2}$$

$$= \sqrt{0.007812 + 0.888759} = \sqrt{0.896571} = 0.946874 < 1.$$

Dolayısıyla, negatif denge noktası $\bar{x}_2 = \beta$ yerel asimptotik kararlıdır ve bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.3

(4.1) denkleminin negatif denge noktası $\bar{x}_2 = \beta$ küresel asimptotik kararlıdır.

İspat.

(4.1) denkleminin bir çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun, negatif denge noktası $\bar{x}_2 = \beta$ 'nın küresel çekici olduğunu göstermek yeterlidir.

Tanım (3.2)'ye göre, bunun için aşağıdaki koşulun sağlandığını ispatlamamız gerekir:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta\,.$$

Denklem (4.7), (3.12) ve (3.13)'ten aşağıdaki limiti elde ederiz.

$$x_n = \frac{M_{-(n+1)}x_0x_{-1}x_{-2} + \left(M_{-n} - M_{-(n+1)}\right)x_0x_{-1} + \left(M_{-(n+2)} + M_{-(n+3)}\right)x_0 + M_{-(n+2)}}{M_{-(n+2)}x_0x_{-1}x_{-2} + \left(M_{-(n+1)} - M_{-(n+2)}\right)x_0x_{-1} + \left(M_{-(n+3)} + M_{-(n+4)}\right)x_0 + M_{-(n+3)}}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{M_{-(n+1)}x_0x_{-1}x_{-2} + \left(M_{-n} - M_{-(n+1)}\right)x_0x_{-1} + \left(M_{-(n+2)} + M_{-(n+3)}\right)x_0 + M_{-(n+2)}}{M_{-(n+2)}x_0x_{-1}x_{-2} + \left(M_{-(n+1)} - M_{-(n+2)}\right)x_0x_{-1} + \left(M_{-(n+3)} + M_{-(n+4)}\right)x_0 + M_{-(n+3)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{M_{-(n+1)}\left(x_0x_{-1}x_{-2} + \left(\frac{M_{-n}}{M_{-(n+1)}} - \frac{M_{-(n+1)}}{M_{-(n+1)}}\right)x_0x_{-1} + \left(\frac{M_{-(n+2)}}{M_{-(n+1)}} + \frac{M_{-(n+3)}}{M_{-(n+1)}}\right)x_0 + \frac{M_{-(n+2)}}{M_{-(n+1)}}\right)}{M_{-(n+2)}\left(x_0x_{-1}x_{-2} + \left(\frac{M_{-(n+1)}}{M_{-(n+2)}} - \frac{M_{-(n+2)}}{M_{-(n+2)}}\right)x_0x_{-1} + \left(\frac{M_{-(n+3)}}{M_{-(n+2)}} + \frac{M_{-(n+4)}}{M_{-(n+2)}}\right)x_0 + \frac{M_{-(n+3)}}{M_{-(n+2)}}\right)}$$

$$= \left(\frac{\left(x_0x_{-1}x_{-2} + (\beta-1)x_0x_{-1} + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right)x_0 + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(x_0x_{-1}x_{-2} + (\beta-1)x_0x_{-1} + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right)x_0 + \frac{1}{\beta}\right)}\right) \lim_{n\to\infty} \frac{M_{-(n+1)}}{M_{-(n+2)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{M_{-(n+1)}}{M_{-(n+2)}}$$

$$= \beta.$$

İspat tamamlandı.

4.2 Fark Denklemi (4.2)

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}\,x_{n-2} + x_{n-1} + 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.2}$$

ile verilen (4.2) denklemi ele alınacak ve bu denklemin çözümlerinin dinamik davranışı analiz edilecektir.

Teorem 4.4

$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$dizisinin (4.2) denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım.

Bu durumda, $n = 0,1,2, \ldots$ için $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözüm dizisinin genel terimi aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$x_n = \frac{M_n x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_{(n-1)} + M_n\right) x_0 x_{-1} + \left(M_{(n+2)} - M_{(n+1)}\right) x_0 + M_{(n+1)}}{M_{(n+1)} x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_n + M_{(n+1)}\right) x_0 x_{-1} + \left(M_{(n+3)} - M_{(n+2)}\right) x_0 + M_{(n+2)}}. \tag{4.10}$$

Burada M_n, n'inci Tetranacci sayısını göstermektedir ve başlangıç koşulları

$$M_0 = 0\,, \qquad M_1 = 0\,, \qquad M_2 = 1\,, \qquad M_3 = 1,$$

şeklindedir. Ayrıca başlangıç değerleri $(x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus F_2$ olmak üzere, F_2 kümesi (4.2) denkleminin yasak kümesi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_2 = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \left\{ (x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} M_{(n+1)} x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_n + M_{(n+1)}\right) x_0 x_{-1} \\ + \left(M_{(n+3)} - M_{(n+2)}\right) x_0 + M_{(n+2)} = 0 \end{array} \right\}.$$

İspat. (Birinci İspat)

Bu teoremi tümevarım yöntemini kullanarak ispatlayacağız. İlk olarak, (4.2) denkleminden açıkça görülmektedir ki, $k = 0$ için sonuç geçerlidir.

$$x_1 = \frac{1}{x_0(x_{-1}x_{-2} + x_{-1} + 1) + 1} = \frac{1}{x_0 x_{-1} x_{-2} + x_0 x_{-1} + x_0 + 1}$$
$$= \frac{M_1 x_0 x_{-1} x_{-2} + (M_0 + M_1) x_0 x_{-1} + (M_3 - M_2) x_0 + M_2}{M_2 x_0 x_{-1} x_{-2} + (M_1 + M_2) x_0 x_{-1} + (M_4 - M_3) x_0 + M_3}.$$

Eşitliğin $n = k$ için geçerli olduğunu varsayalım; yani

$$x_k = \frac{M_k x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_{(k-1)} + M_k\right) x_0 x_{-1} + \left(M_{(k+2)} - M_{(k+1)}\right) x_0 + M_{(k+1)}}{M_{(k+1)} x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_k + M_{(k+1)}\right) x_0 x_{-1} + \left(M_{(k+3)} - M_{(k+2)}\right) x_0 + M_{(k+2)}}$$

$$x_{k-1} = \frac{M_{(k-1)} x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_{(k-2)} + M_{(k-1)}\right) x_0 x_{-1} + \left(M_{(k+1)} - M_k\right) x_0 + M_k}{M_k x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_{(k-1)} + M_k\right) x_0 x_{-1} + \left(M_{(k+2)} - M_{(k+1)}\right) x_0 + M_{(k+1)}}$$

$$x_{k-2} = \frac{M_{(k-2)} x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_{(k-3)} + M_{(k-2)}\right) x_0 x_{-1} + \left(M_k - M_{(k-1)}\right) x_0 + M_{(k-1)}}{M_{(k-1)} x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_{(k-2)} + M_{(k-1)}\right) x_0 x_{-1} + \left(M_{(k+1)} - M_k\right) x_0 + M_k}.$$

Bu nedenle, bunun $k+1$ için de geçerli olduğunu göstermeliyiz. (4.2) ve (4.10) denklemlerini göz önünde bulundurarak $x = k+1'$i şu şekilde elde ederiz:

$$x_{k+1} = \frac{1}{x_k(x_{k-1}x_{k-2} + x_{k-1} + 1) + 1},$$

$$x_{k-1}.x_{k-2} = \left(\frac{M_{(k-1)}x_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-2)} + M_{(k-1)})x_0x_{-1} + (M_{(k+1)} - M_k)x_0 + M_k}{M_kx_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-1)} + M_k)x_0x_{-1} + (M_{(k+2)} - M_{(k+1)})x_0 + M_{(k+1)}}\right)$$

$$\left(\frac{M_{(k-2)}x_0x_{-1}x_{-2} + \left(M_{(k-3)} + M_{(k-2)}\right)x_0x_{-1} + (M_k - M_{(k-1)})x_0 + M_{(k-1)}}{M_{(k-1)}x_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-2)} + M_{(k-1)})x_0x_{-1} + (M_{(k+1)} - M_k)x_0 + M_k}\right)$$

$$= \frac{M_{(k-2)}x_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-3)} + M_{(k-2)})x_0x_{-1} + (M_k - M_{(k-1)})x_0 + M_{(k-1)}}{M_kx_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-1)} + M_k)x_0x_{-1} + (M_{(k+2)} - M_{(k+1)})x_0 + M_{(k+1)}},$$

$$x_{k-1}x_{k-2} + x_{k-1} =$$

$$\frac{M_{(k-2)}x_0x_{-1}x_{-2} + \left(M_{(k-3)} + M_{(k-2)}\right)x_0x_{-1} + \left(M_k - M_{(k-1)}\right)x_0 + M_{(k-1)}}{M_kx_0x_{-1}x_{-2} + \left(M_{(k-1)} + M_k\right)x_0x_{-1} + \left(M_{(k+2)} - M_{(k+1)}\right)x_0 + M_{(k+1)}}$$

$$+ \frac{M_{(k-1)}x_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-2)} + M_{(k-1)})x_0x_{-1} + (M_{(k+1)} - M_k)x_0 + M_k}{M_kx_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-1)} + M_k)x_0x_{-1} + (M_{(k+2)} - M_{(k+1)})x_0 + M_{(k+1)}},$$

$$x_{k-1}x_{k-2} + x_{k-1} =$$

$$\frac{(M_{(k-2)} + M_{(k-1)})x_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-3)} + 2M_{(k-2)} + M_{(k-1)})x_0x_{-1} + (M_{(k+1)} - M_{(k-1)})x_0 + (M_{(k-1)} + M_k)}{M_kx_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-1)} + M_k)x_0x_{-1} + (M_{(k+2)} - M_{(k+1)})x_0 + M_{(k+1)}}$$

$$(x_{k-1}x_{k-2} + x_{k-1} + 1) =$$

$$\frac{(M_{(k-2)} + M_{(k-1)} + M_k)x_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-3)} + 2M_{(k-2)} + 2M_{(k-1)} + M_k)x_0x_{-1} + (M_{(k+2)} - M_{(k-1)})x_0 + (M_{(k-1)} + M_k + M_{(k+1)})}{M_kx_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-1)} + M_k)x_0x_{-1} + (M_{(k+2)} - M_{(k+1)})x_0 + M_{(k+1)}}$$

$$x_k(x_{k-1}x_{k-2} + x_{k-1} + 1) =$$

$$\frac{(M_{(k-2)} + M_{(k-1)} + M_k)x_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k-3)} + 2M_{(k-2)} + 2M_{(k-1)} + M_k)x_0x_{-1} + (M_{(k+2)} - M_{(k-1)})x_0 + (M_{(k-1)} + M_k + M_{(k+1)})}{M_{(k+1)}x_0\,x_{-1}x_{-2} + (M_k + M_{(k+1)})x_0x_{-1} + (M_{(k+3)} - M_{(k+2)})x_0 + M_{(k+2)}}$$

$$x_{(k+1)} = \frac{M_{(k+1)}x_0x_{-1}x_{-2} + (\,M_k + M_{(k+1)})x_0x_{-1} + (M_{(k+3)} - M_{(k+2)})x_0 + M_{(k+2)}}{M_{(k+2)}x_0x_{-1}x_{-2} + (M_{(k+1)} + M_{(k+2)})x_0x_{-1} + (M_{(k+4)} - M_{(k+3)})x_0 + M_{(k+3)}}.$$

Bu da ispatı ve tümevarımı tamamlar.

İspat. (İkinci İspat)

Bu sonucun ispatını göstereceğiz. Bu amaçla $n = 0,1,2,$ ... olsun.

$$n = 0 \implies x_1 = \frac{1}{x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1},$$

$$n = 1 \implies x_2 = \frac{x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1}{x_0x_{-1}x_{-2} + 2x_0x_{-1} + 2x_0 + 2},$$

$$n=2 \implies x_3=\frac{x_0x_{-1}x_{-2}+2x_0x_{-1}+2x_0+2}{2x_0x_{-1}x_{-2}+3x_0x_{-1}+4x_0+4},$$

$$n=3 \implies x_4=\frac{2x_0x_{-1}x_{-2}+3x_0x_{-1}+4x_0+4}{4x_0x_{-1}x_{-2}+6x_0x_{-1}+7x_0+8},$$

$$n=4 \implies x_5=\frac{4x_0x_{-1}x_{-2}+6x_0x_{-1}+7x_0+8}{8x_0x_{-1}x_{-2}+12x_0x_{-1}+14x_0+15},$$

$$n=5 \implies x_6=\frac{8x_0x_{-1}x_{-2}+12x_0x_{-1}+14x_0+15}{15x_0x_{-1}x_{-2}+23x_0x_{-1}+27x_0+29},$$

$$n=6 \implies x_7=\frac{15x_0x_{-1}x_{-2}+23x_0x_{-1}+27x_0+29}{29x_0x_{-1}x_{-2}+44x_0x_{-1}+52x_0+56},$$

$$n=7 \implies x_8=\frac{29x_0x_{-1}x_{-2}+44x_0x_{-1}+52x_0+56}{56x_0x_{-1}x_{-2}+85x_0x_{-1}+100x_0+108},$$

$$n=8 \implies x_9=\frac{56x_0x_{-1}x_{-2}+85x_0x_{-1}+100x_0+108}{108x_0x_{-1}x_{-2}+164x_0x_{-1}+193x_0+208},$$

$$n=9 \implies x_{10}=\frac{108x_0x_{-1}x_{-2}+164x_0x_{-1}+193x_0+208}{208x_0x_{-1}x_{-2}+316x_0x_{-1}+372x_0+401}.$$

$$\vdots$$

Böylece, dördüncü dereceden tekrarlama ilişkisi (3.11) esas alınarak ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.5

Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) (4.2) denkleminin denge noktaları $\overline{x}_1 = a$ *ve* $\overline{x}_2 = b$ 'dir.

(ii) (4.2) denklemi, tek bir pozitif denge noktasına sahiptir; bu denge noktası $\overline{x}_1 = a$ olup a yerel asimptotik kararlı bir noktadır.

(iii) (4.2) denklemi, tek bir negatif denge noktasına sahiptir; bu denge noktası $\overline{x}_2 = b$ olup b itici (püskürtücü) bir noktadır.

İspat.

(i) (4.2) denkleminin denge noktaları, denge koşulu sağlanarak elde edilir.

$$\overline{x}=\frac{1}{\overline{x}\,(\overline{x}\,\overline{x}+\overline{x}+1)+1},$$

$$\overline{x}=\frac{1}{\overline{x}\,(\overline{x}^{\,2}+\overline{x}+1)+1},$$

$$\overline{x}=\frac{1}{\overline{x}^{\,3}+\overline{x}^{\,2}+\overline{x}+1},$$

$$\overline{x}^{\,4}+\overline{x}^{\,3}+\overline{x}^{\,2}+\overline{x}=1.$$

Aşağıdaki dördüncü dereceden denklemi elde ederiz

$$\bar{x}^4 + \bar{x}^3 + \bar{x}^2 + \bar{x} - 1 = 0. \tag{4.11}$$

Dördüncü dereceden (4.11) denkleminin kökleri

$a = 0.518789$,

$b = -1.290648$,

$c = -0.114071 + 1.216746\, i$,

$d = -0.114071 - 1.216746\, i$.

Buna göre, (4.2) denklemine ait iki adet denge noktası bulunmaktadır:

$\bar{x}_1 = a = 0.518789$ (pozitif denge noktası),

$\bar{x}_2 = b = -1.290648$ (negatif denge noktası).

(ii) Şimdi, (4.2) denkleminin tek bir pozitif denge noktası $\bar{x}_1 = a = 0.518789$ sahip olduğunu ve a'nın yerel asimptotik kararlı bir nokta olduğunu gösterelim.

I 'nin reel sayılardan oluşan bir aralık olduğunu ve

$f : I^3 \to I$

aşağıdaki şekilde tanımlanan sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x(yz+y+1)+1}, \tag{4.12}$$

Bu nedenle, şu sonuç çıkar:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{-yz-y-1}{(\,x(yz+y+1)+1\,)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{-xz-x}{(\,x(yz+y+1)+1\,)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{-xy}{(\,x(yz+y+1)+1\,)^2}.$$

Daha sonra, (4.11)'den

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_1)}{\partial x} = \frac{-\bar{x}_1{}^2 - \bar{x}_1 - 1}{(\bar{x}_1(\bar{x}_1{}^2 + \bar{x}_1 + 1) + 1\,)^2}$$

$$= \frac{-a^2 - a - 1}{(a(a^2+a+1)+1\,)^2}$$

$$= \frac{-a^2 - a - 1}{(a^3+a^2+a+1\,)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{-a+1}{-a^2}}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2}$$

$$= a - 1,$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1)}{\partial y} = \frac{-{\bar{x}_1}^2 - \bar{x}_1}{(\bar{x}_1({\bar{x}_1}^2 + \bar{x}_1 + 1) + 1)^2}$$

$$= \frac{-a^2 - a}{(a(a^2 + a + 1) + 1)^2}$$

$$= \frac{-a^2 - a}{(a^3 + a^2 + a + 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{-1}{a^2 + 1}}{\left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{-a^2}{a^2 + 1},$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1)}{\partial z} = \frac{-{\bar{x}_1}^2}{(\bar{x}_1({\bar{x}_1}^2 + \bar{x}_1 + 1) + 1)^2}$$

$$= \frac{-a^2}{(a(a^2 + a + 1) + 1)^2}$$

$$= \frac{-a^2}{(a^3 + a^2 + a + 1)^2}$$

$$= \frac{-a^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

$$= -a^4,$$

ve (4.2) denkleminin $\bar{x}_1 = a = 0.518789$ denge noktası etrafındaki doğrusallaştırılmış denklemi aşağıdaki gibidir:

$$z_{n+1} = (a - 1)z_n + \left(\frac{-a^2}{a^2 + 1}\right) z_{n-1} + (-a^4) z_{n-2}.$$

Bu denklem, eşdeğer olarak

$$z_{n+1} + p\, z_n + q\, z_{n-1} + r\, z_{n-2} = 0,$$

şeklinde de yazılabilir.

Burada katsayılar

$$p = -a + 1 = 0.481211\,,$$

$$q = \frac{a^2}{a^2 + 1} = \frac{0.269142}{0.269142 + 1} = 0.212066\,,$$

$r = a^4 = 0.072438$,

şeklindedir.

Dolayısıyla, bu doğrusal fark denklemine karşılık gelen karakteristik denklem:

$$\lambda^3 + 0.481211\,\lambda^2 + 0.212066\,\lambda + 0.072438 = 0$$

olarak elde edilir.

Karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_2 = \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_3 = \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 'ye dikkat edin ve

$$A = q - \frac{p^2}{3}$$

$$= 0.212066 - \frac{(0.481211)^2}{3}$$

$$= 0.212066 - 0.077188 = 0.134878\,.$$

$$B = r - \frac{pq}{3} + \frac{2}{27}p^3$$

$$= 0.072438 - \frac{(0.481211)(0.212066)}{3} + \frac{2}{27}(0.481211)^3$$

$$= 0.072438 - 0.034016 + 0.008254 = 0.046676\,.$$

Değerleri köklere yerleştirdikten sonra

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-0.046676 + \sqrt{(0.046676)^2 + \frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}}$$

$$+\sqrt[3]{\frac{-0.046676-\sqrt{(0.046676)^2+\frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}}-\frac{0.481211}{3}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{-0.046676+\sqrt{0.002542}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-0.046676-\sqrt{0.002542}}{2}}-\frac{0.481211}{3}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{-0.046676+0.050418}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-0.046676-0.050418}{2}}-\frac{0.481211}{3}$$

$$=0.123223-0.364800-0.160404$$

$$=-0.401981\,,$$

$$\lambda_2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676+\sqrt{(0.046676)^2+\frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676-\sqrt{(0.046676)^2+\frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}}-\frac{0.481211}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676+\sqrt{0.002542}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676-\sqrt{0.002542}}{2}}-\frac{0.481211}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676+0.050418}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676-0.050418}{2}}-\frac{0.481211}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.123223)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.364800)-0.160404$$

$$=-0.061612+0.106714\,i+0.1824+0.315926\,i-0.160404$$

$$=-0.039616+0.42264\,i\,,$$

$$\lambda_3=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676+\sqrt{(0.046676)^2+\frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676-\sqrt{(0.046676)^2+\frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}}-\frac{0.481211}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676+\sqrt{0.002542}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676-\sqrt{0.002542}}{2}}-\frac{0.481211}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676+0.050418}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.046676-0.050418}{2}}-\frac{0.481211}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.123223)+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.364800)-0.160404$$

$$=-0.061612-0.106714\,i+0.1824-0.315926\,i-0.160404$$

$$=-0.039616-0.42264\,i\,,$$

olarak elde edilir. Bu durumda,

$$|\lambda_1|=|-0.401981|=0.401981<1,$$

$$|\lambda_2|=|-0.039616+0.42264\,i|=\sqrt{(-0.039616)^2+(0.42264)^2}$$

$$=\sqrt{0.001570+0.178625}=\sqrt{0.180195}=0.424494<1,$$

$$|\lambda_3|=|-0.039616-0.42264\,i|=\sqrt{(-0.039616)^2+(-0.42264)^2}$$

$$=\sqrt{0.001570+0.178625}=\sqrt{0.180195}=0.424494<1.$$

Dolayısıyla, pozitif denge noktası $\bar{x}_1=a$ yerel asimptotik kararlıdır ve bu ispatı tamamlar.

(iii) Şimdi, (4.2) denkleminin tek bir negatif denge noktası $\bar{x}_2=b=-1.290648$ sahip olduğunu ve b'nin itici (püskürtücü) bir nokta olduğunu gösterelim.

Benzer şekilde, (4.12) kullanılarak (4.2) denkleminin denge noktası $\bar{x}_2=b$ etrafındaki doğrusallaştırılmış denklem aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$z_{n+1}+p\,z_n+q\,z_{n-1}+r\,z_{n-2}=0\,.$$

Burada katsayılar

$$p=-b+1=2.290648\,,$$

$$q=\frac{b^2}{b^2+1}=\frac{1.665772}{1.665772+1}=0.624874\,,$$

$$r = b^4 = 2.774796\,,$$

şeklindedir.

Dolayısıyla, bu doğrusal fark denklemine karşılık gelen karakteristik denklem**:**

$$\lambda^3 + 2.290648\,\lambda^2 + 0.624874\,\lambda + 2.774796 = 0,$$

olarak elde edilir.

Karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_2 = \omega.\sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega^2.\sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_3 = \omega^2.\sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega.\sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 'ye dikkat edin ve

$$A = q - \frac{p^2}{3}$$

$$= 0.624874 - \frac{(2.290648)^2}{3}$$

$$= 0.624874 - 1.749023 = -1.124149\,.$$

$$B = r - \frac{pq}{3} + \frac{2}{27}p^3$$

$$= 2.774796 - \frac{(2.290648)(0.624874)}{3} + \frac{2}{27}(2.290648)^3$$

$$= 2.774796 - 0.477122 + 0.890310 = 3.187984\,.$$

Değerleri köklere yerleştirdikten sonra

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-3.187984 + \sqrt{(3.187984)^2 + \frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}}$$

$$+\sqrt[3]{\frac{-3.187984-\sqrt{(3.187984)^2+\frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}}-\frac{2.290648}{3}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{-3.187984+\sqrt{9.952783}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-3.187984-\sqrt{9.952783}}{2}}-\frac{2.290648}{3}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{-3.187984+3.154803}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-3.187984-3.154803}{2}}-\frac{2.290648}{3}$$

$$=-0.255047-1.469208-0.763549$$

$$=-2.487804\,,$$

$$\lambda_2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984+\sqrt{(3.187984)^2+\frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984-\sqrt{(3.187984)^2+\frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}}-\frac{2.290648}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984+\sqrt{9.952783}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984-\sqrt{9.952783}}{2}}-\frac{2.290648}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984+3.154803}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984-3.154803}{2}}-\frac{2.290648}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.255047)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1.469208)-0.763549$$

$$=0.127524-0.220878\,i+0.734604+1.272372\,i-0.763549$$

$$=0.098579+1.051495\,i\,,$$

$$\lambda_3=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984+\sqrt{(3.187984)^2+\frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984-\sqrt{(3.187984)^2+\frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}}-\frac{2.290648}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984+\sqrt{9.952783}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984-\sqrt{9.952783}}{2}}-\frac{2.290648}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984+3.154803}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-3.187984-3.154803}{2}}-\frac{2.290648}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.255047)+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1.469208)-0.763549$$

$$=0.127524+0.220878\,i+0.734604-1.272372\,i-0.763549$$

$$=0.098579-1.051495\,i\,,$$

olarak elde edilir. Bu durumda,

$$|\lambda_1|=|-2.487804|=2.487804>1,$$

$$|\lambda_2|=|0.098579+1.051495\,i|=\sqrt{(0.098579)^2+(1.051495)^2}$$

$$=\sqrt{0.009718+1.105642}=\sqrt{1.11536}=1.056106>1,$$

$$|\lambda_3|=|0.098579-1.051495\,i|=\sqrt{(0.098579)^2+(-1.051495)^2}$$

$$=\sqrt{0.009718+1.105642}=\sqrt{1.11536}=1.056106>1.$$

Dolayısıyla, negatif denge noktası $\bar{x}_2=b$ iticidir (püskürtücüdür) ve bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.6

(4.2) denkleminin pozitif denge noktası $\bar{x}_1=a$ küresel asimptotik kararlıdır.

İspat.

(4.2) denkleminin bir çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun, pozitif denge noktası $\bar{x}_1=a$'nın küresel çekici olduğunu göstermek yeterlidir.

Tanım (3.2)'ye göre, bunun için aşağıdaki koşulun sağlandığını ispatlamamız gerekir:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\,.$$

Denklem (4.10), (3.12) ve (3.13)'ten aşağıdaki limiti elde ederiz.

$$x_n = \frac{M_n x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_{(n-1)} + M_n\right) x_0 x_{-1} + \left(M_{(n+2)} - M_{(n+1)}\right) x_0 + M_{(n+1)}}{M_{(n+1)} x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(M_n + M_{(n+1)}\right) x_0 x_{-1} + \left(M_{(n+3)} - M_{(n+2)}\right) x_0 + M_{(n+2)}}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{M_n \left(x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(\frac{M_{(n-1)}}{M_n} + \frac{M_n}{M_n}\right) x_0 x_{-1} + \left(\frac{M_{(n+2)}}{M_n} - \frac{M_{(n+1)}}{M_n}\right) x_0 + \frac{M_{(n+1)}}{M_n}\right)}{M_{(n+1)} \left(x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(\frac{M_n}{M_{(n+1)}} + \frac{M_{(n+1)}}{M_{(n+1)}}\right) x_0 x_{-1} + \left(\frac{M_{(n+3)}}{M_{(n+1)}} - \frac{M_{(n+2)}}{M_{(n+1)}}\right) x_0 + \frac{M_{(n+2)}}{M_{(n+1)}}\right)}$$

$$= \left(\frac{\left(x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(\frac{M_{(n-1)}}{M_n} + \frac{M_n}{M_n}\right) x_0 x_{-1} + \left(\frac{M_{(n+2)}}{M_n} - \frac{M_{(n+1)}}{M_n}\right) x_0 + \frac{M_{(n+1)}}{M_n}\right)}{\left(x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(\frac{M_n}{M_{(n+1)}} + \frac{M_{(n+1)}}{M_{(n+1)}}\right) x_0 x_{-1} + \left(\frac{M_{(n+3)}}{M_{(n+1)}} - \frac{M_{(n+2)}}{M_{(n+1)}}\right) x_0 + \frac{M_{(n+2)}}{M_{(n+1)}}\right)} \right) \lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{M_{(n+1)}}$$

$$= \left(\frac{\left(x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) x_0 x_{-1} + (\alpha^2 - \alpha) x_0 + \alpha\right)}{\left(x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) x_0 x_{-1} + (\alpha^2 - \alpha) x_0 + \alpha\right)} \right) \lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{M_{(n+1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{M_{(n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\alpha}$$

$$= a.$$

İspat tamamlandı.

4.3 Fark Denklemi (4.3)

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n (x_{n-1}\, x_{n-2} + x_{n-1} - 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.3}$$

ile verilen (4.3) denklemi ele alınacak ve bu denklemin çözümlerinin dinamik davranışı analiz edilecektir.

Teorem 4.7

$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$dizisinin (4.3) denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım.

Bu durumda, $n = 0,1,2, \ldots$ için $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözüm dizisinin genel terimi aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$x_n = \frac{(-1)^n M_{-n} x_0 x_{-1} x_{-2} + (-1)^{n-1}\left(M_{-(n-1)} - M_{-n}\right) x_0 x_{-1} + (-1)^n \left(M_{-(n+1)} + M_{-(n+2)}\right) x_0 + (-1)^{n+1} M_{-(n+1)}}{(-1)^{n+1} M_{-(n+1)} x_0 x_{-1} x_{-2} + (-1)^n \left(M_{-n} - M_{-(n+1)}\right) x_0 x_{-1} + (-1)^{n+1} \left(M_{-(n+2)} + M_{-(n+3)}\right) x_0 + (-1)^{n+2} M_{-(n+2)}}. \tag{4.13}$$

Burada M_n, n'inci Tetranacci sayısını göstermektedir ve başlangıç koşulları

$$M_0 = 0\,, \qquad M_1 = 0\,, \qquad M_2 = 1\,, \qquad M_3 = 1,$$

şeklindedir. Ayrıca başlangıç değerleri $(x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus F_3$ olmak üzere, F_3 kümesi (4.3) denkleminin yasak kümesi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_3 = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \left\{ (x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} (-1)^{n+1} M_{-(n+1)} x_0 x_{-1} x_{-2} + (-1)^n \left(M_{-n} - M_{-(n+1)}\right) x_0 x_{-1} \\ +(-1)^{n+1} \left(M_{-(n+2)} + M_{-(n+3)}\right) x_0 + (-1)^{n+2} M_{-(n+2)} = 0 \end{array} \right\}.$$

İspat.

Bu sonucun ispatını göstereceğiz. Bu amaçla $n = 0,1,2,$ ... olsun.

$$n = 0 \implies x_1 = \frac{1}{x_0 x_{-1} x_{-2} + x_0 x_{-1} - x_0 + 1},$$

$$n = 1 \implies x_2 = \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} + x_0 x_{-1} - x_0 + 1}{x_0 x_{-1} x_{-2} + 2x_0 x_{-1}},$$

$$n = 2 \implies x_3 = \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} + 2x_0 x_{-1}}{x_0 x_{-1} + 2x_0},$$

$$n = 3 \implies x_4 = \frac{x_0 x_{-1} + 2x_0}{x_0 + 2},$$

$$n = 4 \implies x_5 = \frac{x_0 + 2}{2x_0 x_{-1} x_{-2} + 2x_0 x_{-1} - 2x_0 + 3},$$

$$n = 5 \implies x_6 = \frac{2x_0 x_{-1} x_{-2} + 2x_0 x_{-1} - 2x_0 + 3}{3x_0 x_{-1} x_{-2} + 5x_0 x_{-1} - x_0 + 1},$$

$$n = 6 \implies x_7 = \frac{3x_0 x_{-1} x_{-2} + 5x_0 x_{-1} - x_0 + 1}{x_0 x_{-1} x_{-2} + 4x_0 x_{-1} + 4x_0},$$

$$n = 7 \implies x_8 = \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} + 4x_0 x_{-1} + 4x_0}{x_0 x_{-1} + 4x_0 + 4},$$

$$n = 8 \implies x_9 = \frac{x_0 x_{-1} + 4x_0 + 4}{4x_0 x_{-1} x_{-2} + 4x_0 x_{-1} - 3x_0 + 8},$$

$$n = 9 \implies x_{10} = \frac{4x_0 x_{-1} x_{-2} + 4x_0 x_{-1} - 3x_0 + 8}{8x_0 x_{-1} x_{-2} + 12x_0 x_{-1} - 4x_0 + 5},$$

$$\vdots$$

Böylece, dördüncü dereceden tekrarlama ilişkisi (3.11) esas alınarak ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.8

Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) (4.3) denkleminin denge noktaları $\bar{x}_1 = e$ *ve* $\bar{x}_2 = g$ 'dir.

(ii) (4.3) denklemi, tek bir pozitif denge noktasına sahiptir; bu denge noktası $\bar{x}_1 = e$ olup e yerel asimptotik kararlı bir noktadır.

(iii) (4.3) denklemi, tek bir negatif denge noktasına sahiptir; bu denge noktası $\bar{x}_2 = g$ olup g itici (püskürtücü) bir noktadır.

İspat.

(i) (4.3) denkleminin denge noktaları, denge koşulu sağlanarak elde edilir.

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}(\bar{x}\,\bar{x} + \bar{x} - 1) + 1},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}(\bar{x}^2 + \bar{x} - 1) + 1},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}^3 + \bar{x}^2 - \bar{x} + 1},$$

$$\bar{x}^4 + \bar{x}^3 - \bar{x}^2 + \bar{x} = 1.$$

Aşağıdaki dördüncü dereceden denklemi elde ederiz

$$\bar{x}^4 + \bar{x}^3 - \bar{x}^2 + \bar{x} - 1 = 0. \tag{4.14}$$

Dördüncü dereceden (4.14) denkleminin kökleri

$$e = 0.774804\,,$$

$$g = -1.927562\,,$$

$$h = 0.076379 + 0.814704\,i\,,$$

$$j = 0.076379 - 0.814704\,i\,.$$

Buna göre, (4.3) denklemine ait iki adet denge noktası bulunmaktadır:

$\bar{x}_1 = e = 0.774804$ (pozitif denge noktası),

$\bar{x}_2 = g = -1.927562$ (negatif denge noktası).

(ii) Şimdi, (4.3) denkleminin tek bir pozitif denge noktası $\bar{x}_1 = e = 0.774804$ sahip olduğunu ve e'nin yerel asimptotik kararlı bir nokta olduğunu gösterelim.

I 'nin reel sayılardan oluşan bir aralık olduğunu ve

$$f : I^3 \to I$$

aşağıdaki şekilde tanımlanan sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim :

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x(yz + y - 1) + 1}. \tag{4.15}$$

Bu nedenle, şu sonuç çıkar:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{-yz - y + 1}{(\,x(yz + y - 1) + 1\,)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{-xz - x}{(\,x(yz + y - 1) + 1\,)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{-xy}{(\,x(yz+y-1)+1\,)^2}.$$

Daha sonra, (4.14)'den

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_1)}{\partial x} = \frac{-\bar{x}_1{}^2-\bar{x}_1+1}{(\bar{x}_1(\bar{x}_1{}^2+\bar{x}_1-1)+1\,)^2}$$

$$= \frac{-e^2-e+1}{(e(e^2+e-1)+1\,)^2}$$

$$= \frac{-e^2-e+1}{(e^3+e^2-e+1\,)^2}$$

$$= \frac{\frac{-e+1}{-e^2}}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}$$

$$= e-1,$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_1)}{\partial y} = \frac{-\bar{x}_1{}^2-\bar{x}_1}{(\bar{x}_1(\bar{x}_1{}^2+\bar{x}_1-1)+1\,)^2}$$

$$= \frac{-e^2-e}{(e(e^2+e-1)+1\,)^2}$$

$$= \frac{-e^2-e}{(e^3+e^2-e+1\,)^2}$$

$$= \frac{\frac{e^2-e+1}{-e^2}}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}$$

$$= -e^2+e-1,$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_1)}{\partial z} = \frac{-\bar{x}_1{}^2}{(\bar{x}_1(\bar{x}_1{}^2+\bar{x}_1-1)+1\,)^2}$$

$$= \frac{-e^2}{(e(e^2+e-1)+1\,)^2}$$

$$= \frac{-e^2}{(e^3+e^2-e+1\,)^2}$$

$$= \frac{-e^2}{\left(\frac{1}{e}\right)^2}$$

$$= -e^4,$$

ve (4.3) denkleminin $\bar{x}_1 = e = 0.774804$ denge noktası civarındaki doğrusallaştırılmış denklemi aşağıdaki gibidir:

$$z_{n+1} = (e-1)z_n + (-e^2 + e - 1)z_{n-1} + (-e^4)z_{n-2}.$$

Bu denklem, eşdeğer olarak

$$z_{n+1} + p\, z_n + q\, z_{n-1} + r\, z_{n-2} = 0,$$

şeklinde de yazılabilir.

Burada katsayılar

$$p = -e + 1 = 0.225196\,,$$

$$q = e^2 - e + 1 = 0.825517\,,$$

$$r = e^4 = 0.360386\,,$$

şeklindedir.

Dolayısıyla, bu doğrusal fark denklemine karşılık gelen karakteristik denklem:

$$\lambda^3 + 0.225196\,\lambda^2 + 0.825517\,\lambda + 0.360386 = 0\,,$$

olarak elde edilir.

Karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_2 = \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_3 = \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 'ye dikkat edin ve

$$A = q - \frac{p^2}{3}$$

$$= 0.825517 - \frac{(0.225196)^2}{3}$$

$$= 0.825517 - 0.016905 = 0.808612\,.$$

$$B = r - \frac{pq}{3} + \frac{2}{27}p^3$$

$$= 0.360386 - \frac{(0.225196)(0.825517)}{3} + \frac{2}{27}(0.225196)^3$$

$$= 0.360386 - 0.061968 + 0.000846 = 0.299264\,.$$

Değerleri köklere yerleştirdikten sonra

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + \sqrt{(0.299264)^2 + \frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-0.299264 - \sqrt{(0.299264)^2 + \frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}} - \frac{0.225196}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + \sqrt{0.167887}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-0.299264 - \sqrt{0.167887}}{2}} - \frac{0.225196}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + 0.409740}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-0.299264 - 0.409740}{2}} - \frac{0.225196}{3}$$

$$= 0.380843 - 0.707739 - 0.075065$$

$$= -0.401961,$$

$$\lambda_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + \sqrt{(0.299264)^2 + \frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.299264 - \sqrt{(0.299264)^2 + \frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}} - \frac{0.225196}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + \sqrt{0.167887}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.299264 - \sqrt{0.167887}}{2}} - \frac{0.225196}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.299264 + 0.409740}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264-0.409740}{2}}-\frac{0.225196}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.380843)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.707739)-0.075065$$

$$=-0.190422+0.329820\,i+0.353870+0.612920\,i-0.075065$$

$$=0.088383+0.94274\,i\,,$$

$$\lambda_3=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264+\sqrt{(0.299264)^2+\frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264-\sqrt{(0.299264)^2+\frac{4(0.808612)^3}{27}}}{2}}-\frac{0.225196}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264+\sqrt{0.167887}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264-\sqrt{0.167887}}{2}}-\frac{0.225196}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264+0.409740}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-0.299264-0.409740}{2}}-\frac{0.225196}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.380843)+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.707739)-0.075065$$

$$=-0.190422-0.329820\,i+0.353870-0.612920\,i-0.075065$$

$$=0.088383-0.94274\,i$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$|\lambda_1|=|-0.401961|=0.401961<1,$$

$$|\lambda_2|=|0.088383+0.94274\,i|=\sqrt{(0.088383)^2+(0.94274)^2}$$

$$=\sqrt{0.007812+0.888759}=\sqrt{0.896571}=0.946874<1,$$

$$|\lambda_3|=|0.088383-0.94274\,i|==\sqrt{(0.088383)^2+(-0.94274)^2}$$

$$= \sqrt{0.007812 + 0.888759} = \sqrt{0.896571} = 0.946874 < 1 .$$

Dolayısıyla, pozitif denge noktası $\bar{x}_1 = e$ yerel asimptotik kararlıdır ve bu ispatı tamamlar.

(iii) Şimdi, (4.3) denkleminin tek bir negatif denge noktası $\bar{x}_2 = g = -1.927562$ sahip olduğunu ve g'nin itici (püskürtücü) bir nokta olduğunu gösterelim.

Benzer şekilde, (4.15) kullanılarak (4.3) denkleminin denge noktası $\bar{x}_2 = g$ etrafındaki doğrusallaştırılmış denklem aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$z_{n+1} + p\, z_n + q\, z_{n-1} + r\, z_{n-2} = 0 .$$

Burada katsayılar

$$p = -g + 1 = 2.927562 ,$$

$$q = g^2 - g + 1 = 6.643057 ,$$

$$r = g^4 = 13.804905 ,$$

şeklindedir.

Dolayısıyla, bu doğrusal fark denklemine karşılık gelen karakteristik denklem**:**

$$\lambda^3 + 2.927562\, \lambda^2 + 6.643057\lambda + 13.804905 = 0 ,$$

olarak elde edilir.

Karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_2 = \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_3 = \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 'ye dikkat edin ve

$$A = q - \frac{p^2}{3}$$

$$= 6.643057 - \frac{(2.927562)^2}{3}$$

$$= 6.643057 - 2.856873 = 3.786184 .$$

$$B = r - \frac{pq}{3} + \frac{2}{27}p^3$$

$$= 13.804905 - \frac{(2.927562)(6.643057)}{3} + \frac{2}{27}(2.927562)^3$$

$$= 13.804905 - 6.482654 + 1.858594 = 9.180845\ .$$

Değerleri köklere yerleştirdikten sonra.

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + \sqrt{(9.180845)^2 + \frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-9.180845 - \sqrt{(9.180845)^2 + \frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}} - \frac{2.927562}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + \sqrt{92.328754}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-9.180845 - \sqrt{92.328754}}{2}} - \frac{2.927562}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + 9.608785}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-9.180845 - 9.608785}{2}} - \frac{2.927562}{3}$$

$$= 0.598115 - 2.110065 - 0.975854$$

$$= -2.487804\ ,$$

$$\lambda_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + \sqrt{(9.180845)^2 + \frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-9.180845 - \sqrt{(9.180845)^2 + \frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}} - \frac{2.927562}{3}$$

$$\lambda_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + \sqrt{92.328754}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-9.180845 - \sqrt{92.328754}}{2}} - \frac{2.927562}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-9.180845 + 9.608785}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845-9.608785}{2}}-\frac{2.927562}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.598115)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2.110065)-0.975854$$

$$=-0.299058+0.517983\,i+1.055033+1.827370\,i-0.975854$$

$$=-0.219879+2.345353\,i\,,$$

$$\lambda_3=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845+\sqrt{(9.180845)^2+\frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845-\sqrt{(9.180845)^2+\frac{4(3.786184)^3}{27}}}{2}}-\frac{2.927562}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845+\sqrt{92.328754}}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845-\sqrt{92.328754}}{2}}-\frac{2.927562}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845+9.608785}{2}}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{\frac{-9.180845-9.608785}{2}}-\frac{2.927562}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.598115)+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2.110065)-0.975854$$

$$=-0.299058-0.517983\,i+1.055033-1.827370\,i-0.975854$$

$$=-0.219879-2.345353\,i$$

olarak elde edilir. Bu durumda,

$$|\lambda_1|=|-2.487804|=2.487804>1,$$

$$|\lambda_2|=|-0.219879+2.345353\,i|=\sqrt{(-0.219879)^2+(2.345353)^2}$$

$$=\sqrt{0.048347+5.500681}=\sqrt{5.549028}=2.355638>1,$$

$$|\lambda_3|=|-0.219879-2.345353\,i|=\sqrt{(-0.219879)^2+(-2.345353)^2}$$

$$= \sqrt{0.048347 + 5.500681} = \sqrt{5.549028} = 2.355638 > 1.$$

Dolayısıyla, negatif denge noktası $\bar{x}_2 = g$ iticidir (püskürtücüdür) ve bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.9

(4.3) denkleminin pozitif denge noktası $\bar{x}_1 = e$ küresel asimptotik kararlıdır.

İspat.

(4.3) denkleminin bir çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun, pozitif denge noktası $\bar{x}_1 = e$'nin küresel çekici olduğunu göstermek yeterlidir.

Tanım (3.2)'ye göre, bunun için aşağıdaki koşulun sağlandığını ispatlamamız gerekir:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e.$$

Denklem (4.13), (3.12) ve (3.13)'ten aşağıdaki limiti elde ederiz.

$$x_n = \frac{(-1)^n M_{-n}x_0x_{-1}x_{-2} + (-1)^{n-1}\left(M_{-(n-1)} - M_{-n}\right)x_0x_{-1} + (-1)^n\left(M_{-(n+1)} + M_{-(n+2)}\right)x_0 + (-1)^{n+1}M_{-(n+1)}}{(-1)^{n+1}M_{-(n+1)}x_0x_{-1}x_{-2} + (-1)^n\left(M_{-n} - M_{-(n+1)}\right)x_0x_{-1} + (-1)^{n+1}\left(M_{-(n+2)} + M_{-(n+3)}\right)x_0 + (-1)^{n+2}M_{-(n+2)}}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n M_{-n}x_0x_{-1}x_{-2} + (-1)^{n-1}\left(M_{-(n-1)} - M_{-n}\right)x_0x_{-1} + (-1)^n\left(M_{-(n+1)} + M_{-(n+2)}\right)x_0 + (-1)^{n+1}M_{-(n+1)}}{(-1)^{n+1}M_{-(n+1)}x_0x_{-1}x_{-2} + (-1)^n\left(M_{-n} - M_{-(n+1)}\right)x_0x_{-1} + (-1)^{n+1}\left(M_{-(n+2)} + M_{-(n+3)}\right)x_0 + (-1)^{n+2}M_{-(n+2)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n M_{-n}\left(x_0x_{-1}x_{-2} - \left(\frac{M_{-(n-1)}}{M_{-n}} - \frac{M_{-n}}{M_{-n}}\right)x_0x_{-1} + \left(\frac{M_{-(n+1)}}{M_{-n}} + \frac{M_{-(n+2)}}{M_{-n}}\right)x_0 - \frac{M_{-(n+1)}}{M_{-n}}\right)}{(-1)^n M_{-(n+1)}\left(-x_0x_{-1}x_{-2} + \left(\frac{M_{-n}}{M_{-(n+1)}} - \frac{M_{-(n+1)}}{M_{-(n+1)}}\right)x_0x_{-1} - \left(\frac{M_{-(n+2)}}{M_{-(n+1)}} + \frac{M_{-(n+3)}}{M_{-(n+1)}}\right)x_0 + \frac{M_{-(n+2)}}{M_{-(n+1)}}\right)}\right)$$

$$= \left(\frac{\left(x_0x_{-1}x_{-2} - \left(\frac{M_{-(n-1)}}{M_{-n}} - \frac{M_{-n}}{M_{-n}}\right)x_0x_{-1} + \left(\frac{M_{-(n+1)}}{M_{-n}} + \frac{M_{-(n+2)}}{M_{-n}}\right)x_0 - \frac{M_{-(n+1)}}{M_{-n}}\right)}{\left(-x_0x_{-1}x_{-2} + \left(\frac{M_{-n}}{M_{-(n+1)}} - \frac{M_{-(n+1)}}{M_{-(n+1)}}\right)x_0x_{-1} - \left(\frac{M_{-(n+2)}}{M_{-(n+1)}} + \frac{M_{-(n+3)}}{M_{-(n+1)}}\right)x_0 + \frac{M_{-(n+2)}}{M_{-(n+1)}}\right)}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{M_{-n}}{M_{-(n+1)}}$$

$$= \frac{\left(x_0x_{-1}x_{-2} - (\beta-1)x_0x_{-1} + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right)x_0 - \frac{1}{\beta}\right)}{\left(-x_0x_{-1}x_{-2} + (\beta-1)x_0x_{-1} - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right)x_0 + \frac{1}{\beta}\right)}\lim_{n\to\infty}\frac{M_{-n}}{M_{-(n+1)}}$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\frac{M_{-n}}{M_{-(n+1)}}$$

$$= -\beta$$

$$= e.$$

İspat tamamlandı.

4.4 Fark Denklemi (4.4)

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{+1}{x_n(x_{n-1}\,x_{n-2} - x_{n-1} + 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.4}$$

ile verilen (4.4) denklemi ele alınacak ve bu denklemin çözümlerinin dinamik davranışı analiz edilecektir.

Teorem 4.10

$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$dizisinin (4.4) denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım.

Bu durumda, $n = 0,1,2,\ldots$ için $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözüm dizisinin genel terimi aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$x_n = \frac{(-1)^n M_n x_0 x_{-1} x_{-2} + (-1)^{n-1}\big(M_{(n-1)} + M_n\big)x_0 x_{-1} + (-1)^{n+1}\big(M_{(n+1)} - M_{(n+2)}\big)x_0 + (-1)^{n+1}M_{(n+1)}}{(-1)^{n+1}M_{(n+1)}x_0 x_{-1} x_{-2} + (-1)^n\big(M_n + M_{(n+1)}\big)x_0 x_{-1} + (-1)^{n+2}\big(M_{(n+2)} - M_{(n+3)}\big)x_0 + (-1)^{n+2}M_{(n+2)}}. \tag{4.16}$$

Burada M_n, n'inci Tetranacci sayısını göstermektedir ve başlangıç koşulları

$$M_0 = 0\,, \qquad M_1 = 0\,, \qquad M_2 = 1\,, \qquad M_3 = 1,$$

şeklindedir. Ayrıca başlangıç değerleri $(x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus F_4$ olmak üzere, F_4 kümesi (4.4) denkleminin yasak kümesi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_4 = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \left\{ (x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} (-1)^{n+1}M_{(n+1)}x_0 x_{-1} x_{-2} + (-1)^n\big(M_n + M_{(n+1)}\big)x_0 x_{-1} \\ +(-1)^{n+2}\big(M_{(n+2)} - M_{(n+3)}\big)x_0 + (-1)^{n+2}M_{(n+2)} = 0 \end{array} \right\}.$$

İspat.

Bu sonucun ispatını göstereceğiz. Bu amaçla $n = 0,1,2,\ldots$ olsun.

$$n = 0 \implies x_1 = \frac{1}{x_0 x_{-1} x_{-2} - x_0 x_{-1} + x_0 - 1},$$

$$n = 1 \implies x_2 = \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} - x_0 x_{-1} + x_0 - 1}{-x_0 x_{-1} x_{-2} + 2x_0 x_{-1} - 2x_0 + 2},$$

$$n = 2 \implies x_3 = \frac{-x_0 x_{-1} x_{-2} + 2x_0 x_{-1} - 2x_0 + 2}{2x_0 x_{-1} x_{-2} - 3x_0 x_{-1} + 4x_0 - 4},$$

$$n = 3 \implies x_4 = \frac{2x_0 x_{-1} x_{-2} - 3x_0 x_{-1} + 4x_0 - 4}{-4x_0 x_{-1} x_{-2} + 6x_0 x_{-1} - 7x_0 + 8},$$

$$n = 4 \implies x_5 = \frac{-4x_0 x_{-1} x_{-2} + 6x_0 x_{-1} - 7x_0 + 8}{8x_0 x_{-1} x_{-2} - 12x_0 x_{-1} + 14x_0 - 15},$$

$$n = 5 \implies x_6 = \frac{8x_0 x_{-1} x_{-2} - 12x_0 x_{-1} + 14x_0 - 15}{-15x_0 x_{-1} x_{-2} + 23x_0 x_{-1} - 27x_0 + 29},$$

$$n = 6 \implies x_7 = \frac{-15x_0 x_{-1} x_{-2} + 23x_0 x_{-1} - 27x_0 + 29}{29x_0 x_{-1} x_{-2} - 44x_0 x_{-1} + 52x_0 - 56},$$

$$n = 7 \implies x_8 = \frac{29x_0x_{-1}x_{-2} - 44x_0x_{-1} + 52x_0 - 56}{-56x_0x_{-1}x_{-2} + 85x_0x_{-1} - 100x_0 + 108},$$

$$n = 8 \implies x_9 = \frac{-56x_0x_{-1}x_{-2} + 85x_0x_{-1} - 100x_0 + 108}{108x_0x_{-1}x_{-2} - 164x_0x_{-1} + 193x_0 - 208},$$

$$n = 9 \implies x_{10} = \frac{108x_0x_{-1}x_{-2} - 164x_0x_{-1} + 193x_0 - 208}{-208x_0x_{-1}x_{-2} + 316x_0x_{-1} - 372x_0 + 401},$$

$$\vdots$$

Böylece, dördüncü dereceden tekrarlama ilişkisi (3.11) esas alınarak ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.11

Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) (4.4) denkleminin denge noktaları $\bar{x}_1 = k$ *ve* $\bar{x}_2 = l$ 'dir.

(ii) (4.4) denklemi, tek bir pozitif denge noktasına sahiptir; bu denge noktası $\bar{x}_1 = k$ olup k itici (püskürtücü) bir noktadır.

(iii) (4.4) denklemi, tek bir negatif denge noktasına sahiptir; bu denge noktası $\bar{x}_2 = l$ olup l yerel asimptotik kararlı bir noktadır.

İspat.

(i) (4.4) denkleminin denge noktaları, denge koşulu sağlanarak elde edilir.

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}(\bar{x}\bar{x} - \bar{x} + 1) - 1},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}(\bar{x}^2 - \bar{x} + 1) - 1},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}^3 - \bar{x}^2 + \bar{x} - 1},$$

$$\bar{x}^4 - \bar{x}^3 + \bar{x}^2 - \bar{x} = 1.$$

Aşağıdaki dördüncü dereceden denklemi elde ederiz

$$\bar{x}^4 - \bar{x}^3 + \bar{x}^2 - \bar{x} - 1 = 0. \tag{4.17}$$

Dördüncü dereceden (4.17) denkleminin kökleri

$$k = 1.290648\,,$$

$$l = -0.518789,$$

$$m = 0.114071 + 1.216746\,i\,,$$

$$n = 0.114071 - 1.216746\,i\,.$$

Buna göre, (4.4) denklemine ait iki adet denge noktası bulunmaktadır:

$\bar{x}_1 = k = 1.290648$ (pozitif denge noktası),

$\bar{x}_2 = l = -0.518789$ (negatif denge noktası).

(ii) Şimdi, (4.4) denkleminin tek bir pozitif denge noktası $\bar{x}_1 = k = 1.290648$ sahip olduğunu ve k'nin itici (püskürtücü) bir nokta olduğunu gösterelim.

I 'nin reel sayılardan oluşan bir aralık olduğunu ve

$$f : I^3 \to I$$

aşağıdaki şekilde tanımlanan sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x(yz-y+1)-1}. \tag{4.18}$$

Bu nedenle, şu sonuç çıkar:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{-yz+y-1}{(\,x(yz-y+1)-1\,)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{-xz+x}{(\,x(yz-y+1)-1\,)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{-xy}{(\,x(yz-y+1)-1\,)^2}.$$

Daha sonra, (4.17)'den

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_1)}{\partial x} = \frac{-\bar{x}_1{}^2+\bar{x}_1-1}{(\bar{x}_1(\bar{x}_1{}^2-\bar{x}_1+1)-1\,)^2}$$

$$= \frac{-k^2+k-1}{(k(k^2-k+1)-1\,)^2}$$

$$= \frac{-k^2+k-1}{(k^3-k^2+k-1\,)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{-k-1}{k^2}}{\left(\dfrac{1}{k}\right)^2}$$

$$= -k-1\,,$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1,\bar{x}_1,\bar{x}_1)}{\partial y} = \frac{-\bar{x}_1{}^2+\bar{x}_1}{(\bar{x}_1(\bar{x}_1{}^2-\bar{x}_1+1)-1\,)^2}$$

$$= \frac{-k^2+k}{(k(k^2-k+1)-1\,)^2}$$

$$= \frac{-k^2+k}{(k^3-k^2+k-1\,)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{-1}{k^2+1}}{\left(\dfrac{1}{k}\right)^2}$$

$$= \frac{-k^2}{k^2+1},$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1)}{\partial z} = \frac{-\bar{x}_1{}^2}{(\bar{x}_1(\bar{x}_1{}^2 - \bar{x}_1 + 1) - 1)^2}$$

$$= \frac{-k^2}{(k(k^2-k+1)-1)^2}$$

$$= \frac{-k^2}{(k^3-k^2+k-1)^2}$$

$$= \frac{-k^2}{\left(\frac{1}{k}\right)^2}$$

$$= -k^4,$$

ve (4.4) denkleminin $\bar{x}_1 = k = 1.290648$ denge noktası etrafındaki doğrusallaştırılmış denklemi aşağıdaki gibidir:

$$z_{n+1} = (-k-1)z_n + \left(\frac{-k^2}{k^2+1}\right) z_{n-1} + (-k^4) z_{n-2}.$$

Bu denklem, eşdeğer olarak

$$z_{n+1} + p\, z_n + q\, z_{n-1} + r\, z_{n-2} = 0,$$

şeklinde de yazılabilir.

Burada katsayılar

$$p = k + 1 = 2.290648,$$

$$q = \frac{k^2}{k^2+1} = \frac{1.665772}{1.665772+1} = 0.624874,$$

$$r = k^4 = 2.774796,$$

şeklindedir.

Dolayısıyla, bu doğrusal fark denklemine karşılık gelen karakteristik denklem:

$$\lambda^3 + 2.290648\,\lambda^2 + 0.624874\,\lambda + 2.774796 = 0,$$

olarak elde edilir.

Karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_2 = \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_3 = \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 + \frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 'ye dikkat edin ve

$$A = q - \frac{p^2}{3}$$

$$= 0.624874 - \frac{(2.290648)^2}{3}$$

$$= 0.624874 - 1.749023 = -1.124149 .$$

$$B = r - \frac{pq}{3} + \frac{2}{27}p^3$$

$$= 2.774796 - \frac{(2.290648)(0.624874)}{3} + \frac{2}{27}(2.290648)^3$$

$$= 2.774796 - 0.477122 + 0.890310 = 3.187984 .$$

Değerleri köklere yerleştirdikten sonra

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-3.187984 + \sqrt{(3.187984)^2 + \frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-3.187984 - \sqrt{(3.187984)^2 + \frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}} - \frac{2.290648}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-3.187984 + \sqrt{9.952783}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-3.187984 - \sqrt{9.952783}}{2}} - \frac{2.290648}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-3.187984 + 3.154803}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-3.187984 - 3.154803}{2}} - \frac{2.290648}{3}$$

$$= -0.255047 - 1.469208 - 0.763549$$

$$= -2.487804 ,$$

$$\lambda_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 + \sqrt{(3.187984)^2 + \frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 - \sqrt{(3.187984)^2 + \frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}} - \frac{2.290648}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 + \sqrt{9.952783}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 - \sqrt{9.952783}}{2}} - \frac{2.290648}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 + 3.154803}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 - 3.154803}{2}} - \frac{2.290648}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.255047) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1.469208) - 0.763549$$

$$= 0.127524 - 0.220878\,i + 0.734604 + 1.272372\,i - 0.763549$$

$$= 0.098579 + 1.051495\,i\,,$$

$$\lambda_3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 + \sqrt{(3.187984)^2 + \frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 - \sqrt{(3.187984)^2 + \frac{4(-1.124149)^3}{27}}}{2}} - \frac{2.290648}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 + \sqrt{9.952783}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 - \sqrt{9.952783}}{2}} - \frac{2.290648}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 + 3.154803}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-3.187984 - 3.154803}{2}} - \frac{2.290648}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.255047) + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1.469208) - 0.763549$$

$$= 0.127524 + 0.220878\, i + 0.734604 - 1.272372\, i - 0.763549$$

$$= 0.098579 - 1.051495\, i\,,$$

olarak elde edilir. Bu durumda,

$$|\lambda_1| = |-2.487804| = 2.487804 > 1,$$

$$|\lambda_2| = |0.098579 + 1.051495\, i| = \sqrt{(0.098579)^2 + (1.051495)^2}$$

$$= \sqrt{0.009718 + 1.105642} = \sqrt{1.11536} = 1.056106 > 1,$$

$$|\lambda_3| = |0.098579 - 1.051495\, i| = \sqrt{(0.098579)^2 + (-1.051495)^2}$$

$$= \sqrt{0.009718 + 1.105642} = \sqrt{1.11536} = 1.056106 > 1.$$

Dolayısıyla, pozitif denge noktası $\bar{x}_1 = k$ iticidir (püskürtücüdür) ve bu ispatı tamamlar.

(iii) Şimdi, (4.4) denkleminin tek bir negatif denge noktası $\bar{x}_2 = l = -0.518789$ sahip olduğunu ve l'nin yerel asimptotik kararlı bir nokta olduğunu gösterelim.

Benzer şekilde, (4.18) kullanılarak (4.4) denkleminin denge noktası $\bar{x}_2 = l$ etrafındaki doğrusallaştırılmış denklem aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$z_{n+1} + p\, z_n + q\, z_{n-1} + r\, z_{n-2} = 0\,.$$

Burada katsayılar

$$p = l + 1 = 0.481211\,,$$

$$q = \frac{l^2}{l^2 + 1} = \frac{0.269142}{0.269142 + 1} = 0.212066\,,$$

$$r = l^4 = 0.072438\,,$$

şeklindedir.

Dolayısıyla, bu doğrusal fark denklemine karşılık gelen karakteristik denklem**:**

$$\lambda^3 + 0.481211\, \lambda^2 + 0.212066\, \lambda + 0.072438 = 0\,,$$

olarak elde edilir.

Karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4A^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_2 = \omega \times \sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$$\lambda_3 = \omega^2 \times \sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4A^3}{27}}}{2}} + \omega \times$$

$$\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4A^3}{27}}}{2}} - \frac{p}{3},$$

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 'ye dikkat edin ve

$$A = q - \frac{p^2}{3}$$

$$= 0.212066 \; - \frac{(0.481211)^2}{3}$$

$$= 0.212066 \; - 0.077188 = 0.134878 \, .$$

$$B = r - \frac{pq}{3} + \frac{2}{27}p^3$$

$$= 0.072438 - \frac{(0.481211)(0.212066)}{3} + \frac{2}{27}(0.481211)^3$$

$$= 0.072438 - 0.034016 + 0.008254 = 0.046676 \, .$$

Değerleri köklere yerleştirdikten sonra

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{-0.046676+\sqrt{(0.046676)^2+\frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{-0.046676-\sqrt{(0.046676)^2+\frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}} - \frac{0.481211}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-0.046676 + \sqrt{0.002542}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-0.046676 - \sqrt{0.002542}}{2}} - \frac{0.481211}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-0.046676 + 0.050418}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-0.046676 - 0.050418}{2}} - \frac{0.481211}{3}$$

$$= 0.123223 - 0.364800 - 0.160404$$

$$= -0.401981 ,$$

$$\lambda_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 + \sqrt{(0.046676)^2 + \frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 - \sqrt{(0.046676)^2 + \frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}} - \frac{0.481211}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 + \sqrt{0.002542}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 - \sqrt{0.002542}}{2}} - \frac{0.481211}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 + 0.050418}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 - 0.050418}{2}} - \frac{0.481211}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.123223) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.364800) - 0.160404$$

$$= -0.061612 + 0.106714\, i + 0.1824 + 0.315926\, i - 0.160404$$

$$= -0.039616 + 0.42264\, i ,$$

$$\lambda_3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 + \sqrt{(0.046676)^2 + \frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 - \sqrt{(0.046676)^2 + \frac{4(0.134878)^3}{27}}}{2}} - \frac{0.481211}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 + \sqrt{0.002542}}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 - \sqrt{0.002542}}{2}} - \frac{0.481211}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 + 0.050418}{2}}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt[3]{\frac{-0.046676 - 0.050418}{2}} - \frac{0.481211}{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.123223) + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-0.364800) - 0.160404$$

$$= -0.061612 - 0.106714\, i + 0.1824 - 0.315926\, i - 0.160404$$

$$= -0.039616 - 0.42264\, i\,,$$

olarak elde edilir. Bu durumda,

$$|\lambda_1| = |-0.401981| = 0.401981 < 1,$$

$$|\lambda_2| = |-0.039616 + 0.42264\, i| = \sqrt{(-0.039616)^2 + (0.42264)^2}$$

$$= \sqrt{0.001570 + 0.178625} = \sqrt{0.180195} = 0.424494 < 1,$$

$$|\lambda_3| = |-0.039616 - 0.42264\, i| = \sqrt{(-0.039616)^2 + (-0.42264)^2}$$

$$= \sqrt{0.001570 + 0.178625} = \sqrt{0.180195} = 0.424494 < 1.$$

Dolayısıyla, negatif denge noktası $\bar{x}_2 = l$ yerel asimptotik kararlıdır ve bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.12

(4.4) denkleminin negatif denge noktası $\bar{x}_2 = l$ küresel asimptotik kararlıdır.

İspat.

(4.4) denkleminin bir çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun, negatif denge noktası $\bar{x}_1 = l$ 'nin küresel çekici olduğunu göstermek yeterlidir.

Tanım (3.2)'ye göre, bunun için aşağıdaki koşulun sağlandığını ispatlamamız gerekir:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

Denklem (4.16), (3.12) ve (3.13)'ten aşağıdaki limiti elde ederiz.

$$x_n = \frac{(-1)^n M_n x_0 x_{-1} x_{-2} + (-1)^{n-1}(M_{(n-1)} + M_n) x_0 x_{-1} + (-1)^{n+1}(M_{(n+1)} - M_{(n+2)}) x_0 + (-1)^{n+1} M_{(n+1)}}{(-1)^{n+1} M_{(n+1)} x_0 x_{-1} x_{-2} + (-1)^n (M_n + M_{(n+1)}) x_0 x_{-1} + (-1)^{n+2}(M_{(n+2)} - M_{(n+3)}) x_0 + (-1)^{n+2} M_{(n+2)}}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n M_n x_0 x_{-1} x_{-2} + (-1)^{n-1}(M_{(n-1)} + M_n) x_0 x_{-1} + (-1)^{n+1}(M_{(n+1)} - M_{(n+2)}) x_0 + (-1)^{n+1} M_{(n+1)}}{(-1)^{n+1} M_{(n+1)} x_0 x_{-1} x_{-2} + (-1)^n (M_n + M_{(n+1)}) x_0 x_{-1} + (-1)^{n+2}(M_{(n+2)} - M_{(n+3)}) x_0 + (-1)^{n+2} M_{(n+2)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n M_n \left(x_0 x_{-1} x_{-2} - \left(\frac{M_{(n-1)}}{M_n} + \frac{M_n}{M_n} \right) x_0 x_{-1} - \left(\frac{M_{(n+1)}}{M_n} - \frac{M_{(n+2)}}{M_n} \right) x_0 - \frac{M_{(n+1)}}{M_n} \right)}{(-1)^n M_{(n+1)} \left(-x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(\frac{M_n}{M_{(n+1)}} + \frac{M_{(n+1)}}{M_{(n+1)}} \right) x_0 x_{-1} + \left(\frac{M_{(n+2)}}{M_{(n+1)}} - \frac{M_{(n+3)}}{M_{(n+1)}} \right) x_0 + \frac{M_{(n+2)}}{M_{(n+1)}} \right)}$$

$$= \left(\frac{\left(x_0 x_{-1} x_{-2} - \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) x_0 x_{-1} - (\alpha - \alpha^2) x_0 - \alpha \right)}{\left(-x_0 x_{-1} x_{-2} + \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) x_0 x_{-1} + (\alpha - \alpha^2) x_0 + \alpha \right)} \right) \lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{M_{(n+1)}}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{M_{(n+1)}}$$

$$= -\frac{1}{\alpha}$$

$$= l.$$

İspat tamamlandı.

4.5 Fark Denklemi (4.5)

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{-1}{x_n (x_{n-1}\, x_{n-2} + x_{n-1} + 1) + 1}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.5}$$

ile verilen (4.5) denklemi ele alınacak ve bu denklemin çözümlerinin dinamik davranışı analiz edilecektir.

Lemma 4.13

$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinin (4.5) denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım.

Bu durumda, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi beş periyotlu (5-periyodik) bir periyodik dizidir; yani

$x_{n+5} = x_n$ tüm $n \geq -1$ için.

İspat.

(4.5) denkleminden başlanarak, yineleme bağıntısı ardışık olarak uygulanır.

$$x_{n+5} = \frac{-1}{x_{n+4}(x_{n+3} x_{n+2} + x_{n+3} + 1) + 1}$$

$$= \frac{-1}{\frac{-1}{x_{n+3}(x_{n+2} x_{n+1} + x_{n+2} + 1) + 1} (x_{n+3} x_{n+2} + x_{n+3} + 1) + 1}$$

$$= \frac{-x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1} - x_{n+3}x_{n+2} - x_{n+3} - 1}{-x_{n+3}x_{n+2} - x_{n+3} - 1 + x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+3}x_{n+2} + x_{n+3} + 1}$$

$$= \frac{-x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1} - x_{n+3}x_{n+2} - x_{n+3} - 1}{x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1}}$$

$$= -1 - \frac{x_{n+3}x_{n+2} + x_{n+3} + 1}{x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1}}$$

$$= -1 - \frac{\dfrac{-x_{n+2}}{x_{n+2}(x_{n+1}x_n + x_{n+1} + 1) + 1} + \dfrac{-1}{x_{n+2}(x_{n+1}x_n + x_{n+1} + 1) + 1} + 1}{\dfrac{-x_{n+2}x_{n+1}}{x_{n+2}(x_{n+1}x_n + x_{n+1} + 1) + 1}}$$

$$= -1 - \frac{-x_{n+2} - 1 + x_{n+2}x_{n+1}x_n + x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+2} + 1}{-x_{n+2}x_{n+1}}$$

$$= -1 - \frac{+x_{n+2}x_{n+1}x_n + x_{n+2}x_{n+1}}{-x_{n+2}x_{n+1}}$$

$$= -1 + x_n + 1$$

$$= x_n \, .$$

Dolayısıyla sonuç elde edilir.

Teorem 4.14

$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinin (4.5) denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım. O hâlde, $n = 1,2,\ldots$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned}
x_{5n-4} &= \frac{-1}{x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1}, \\
x_{5n-3} &= \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} - x_0 - 1}{x_0x_{-1}x_{-2}}, \\
x_{5n-2} &= x_{-2}, \\
x_{5n-1} &= x_{-1}, \\
x_{5n} &= x_0.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Burada başlangıç koşulları

$$M_0 = 0\,, \qquad M_1 = 0\,, \qquad M_2 = 1\,, \qquad M_3 = 1,$$

şeklindedir. Ayrıca başlangıç değerleri $(x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus F_5$ olmak üzere, F_5 kümesi (4.5) denkleminin yasak kümesi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_5 = \left\{ (x_{-2}, x_{-1}, x_0) \; : \quad x_0x_{-1}x_{-2} = 0 \quad \text{veya} \quad x_{-2} = \frac{-x_0x_{-1} - x_0 - 1}{x_0x_{-1}} \right\}.$$

İspat.

(4.5) denkleminden açıkça görülmektedir ki, $n = 0$ için sonuç geçerlidir.

Şimdi $n > 0$ olduğunu ve varsayımımızın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

Yani,

$$x_{5n-9} = \frac{-1}{x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1},$$

$$x_{5n-8} = \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} - x_0 - 1}{x_0x_{-1}x_{-2}},$$

$$x_{5n-7} = x_{-2},$$

$$x_{5n-6} = x_{-1},$$

$$x_{5n-5} = x_0.$$

Şimdi, (4.5) denklemi kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$x_{5n-4} = \frac{-1}{x_{5n-5}(x_{5n-6}x_{5n-7} + x_{5n-6} + 1) + 1}$$

$$= \frac{-1}{x_0(x_{-1}x_{-2} + x_{-1} + 1) + 1}$$

$$= \frac{-1}{x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1}.$$

Bundan ve yine (4.5) denkleminden hareketle,

$$x_{5n-3} = \frac{-1}{x_{5n-4}(x_{5n-5}x_{5n-6} + x_{5n-5} + 1) + 1}$$

$$= \frac{-1}{\frac{-1}{x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1}(x_0x_{-1} + x_0 + 1) + 1}$$

$$= \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} - x_0 - 1}{-x_0x_{-1} - x_0 - 1 + x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1}$$

$$= \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} - x_0 - 1}{x_0x_{-1}x_{-2}}.$$

Yine (4.5) denkleminden doğrudan elde edilir ki:

$$x_{5n-2} = \frac{-1}{x_{5n-3}(x_{5n-4}x_{5n-5} + x_{5n-4} + 1) + 1}$$

$$= \frac{-1}{\frac{-x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} - x_0 - 1}{x_0x_{-1}x_{-2}}\left(\frac{-x_0}{x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1} + \frac{-1}{x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1} + 1\right) + 1}$$

$$= \frac{-(x_0x_{-1}x_{-2})(x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1)}{(-x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} - x_0 - 1)[-x_0 - 1 + x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} + x_0 + 1 - x_0x_{-1}x_{-2}]}$$

$$= \frac{(x_0 x_{-1} x_{-2})}{[-x_0 - 1 + x_0 x_{-1} x_{-2} + x_0 x_{-1} + x_0 + 1 - x_0 x_{-1} x_{-2}]}$$

$$= \frac{x_0 x_{-1} x_{-2}}{x_0 x_{-1}}$$

$$= x_{-2}.$$

Yine (4.5) denkleminden doğrudan elde edilir ki:

$$x_{5n-1}$$

$$= \frac{-1}{x_{-2}\left(\frac{-x_0 x_{-1} x_{-2} - x_0 x_{-1} - x_0 - 1}{x_0 x_{-1} x_{-2}} \times \frac{-1}{x_0 x_{-1} x_{-2} + x_0 x_{-1} + x_0 + 1} + \frac{-x_0 x_{-1} x_{-2} - x_0 x_{-1} - x_0 - 1}{x_0 x_{-1} x_{-2}} + 1\right) + 1}$$

$$= \frac{-1}{x_{-2}\left(\frac{+1}{x_0 x_{-1} x_{-2}} + \frac{-x_0 x_{-1} x_{-2} - x_0 x_{-1} - x_0 - 1}{x_0 x_{-1} x_{-2}} + \frac{x_0 x_{-1} x_{-2}}{x_0 x_{-1} x_{-2}}\right) + 1}$$

$$= \frac{-x_0 x_{-1}}{+1 - x_0 x_{-1} x_{-2} - x_0 x_{-1} - x_0 - 1 + x_0 x_{-1} x_{-2} + x_0 x_{-1}}$$

$$= \frac{-x_0 x_{-1}}{-x_0}$$

$$= x_{-1}.$$

Benzer şekilde, (4.5) denkleminden aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$x_{5n-5} = \frac{-1}{x_{5n-1}(x_{5n-2} x_{5n-3} + x_{5n-2} + 1) + 1}$$

$$= \frac{-1}{x_{-1}\left(x_{-2} \times \frac{-x_0 x_{-1} x_{-2} - x_0 x_{-1} - x_0 - 1}{x_0 x_{-1} x_{-2}} + x_{-2} + 1\right) + 1}$$

$$= \frac{-1}{x_{-1}\left(\frac{-x_0 x_{-1} x_{-2} - x_0 x_{-1} - x_0 - 1 + x_0 x_{-1} x_{-2} + x_0 x_{-1}}{x_0 x_{-1}}\right) + 1}$$

$$= \frac{-x_0}{-x_0 x_{-1} x_{-2} - x_0 x_{-1} - x_0 - 1 + x_0 x_{-1} x_{-2} + x_0 x_{-1} + x_0}$$

$$= \frac{-x_0}{-1}$$

$$= x_0.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.15

(4.5) denklemi tek bir denge noktasına sahiptir $\overline{x} = s$ ve s hiperbolik olmayan bir noktadır.

İspat.

(4.5) denkleminin denge noktası, denge koşulu sağlanarak elde edilir.

$$\bar{x} = \frac{-1}{\bar{x}\,(\bar{x}\,\bar{x} + \bar{x} + 1) + 1},$$

$$\bar{x} = \frac{-1}{\bar{x}\,(\bar{x}^2 + \bar{x} + 1) + 1},$$

$$\bar{x} = \frac{-1}{\bar{x}^3 + \bar{x}^2 + \bar{x} + 1},$$

$$\bar{x}^4 + \bar{x}^3 + \bar{x}^2 + \bar{x} = -1.$$

Aşağıdaki dördüncü dereceden denklemi elde ederiz

$$\bar{x}^4 + \bar{x}^3 + \bar{x}^2 + \bar{x} + 1 = 0. \qquad (4.20)$$

Dördüncü dereceden (4.20) denkleminin kökleri

$$x_k = e^{\frac{2\pi k}{5} i} \qquad , k = 1,2,3,4.$$

$$x_1 = e^{\frac{2\pi}{5} i} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 0.309017 + 0.951057\, i\,,$$

$$x_2 = e^{\frac{4\pi}{5} i} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = -0.809017 + 0.587785\, i\,,$$

$$x_3 = e^{\frac{6\pi}{5} i} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = -0.809017 - 0.587785\, i = \bar{x}_2.$$

$$x_4 = e^{\frac{8\pi}{5} i} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 0.309017 - 0.951057\, i = \bar{x}_1.$$

Bu durumda

$$|x_1| = \sqrt{(0.309017)^2 + (0.951057)^2} = \sqrt{0.095492 + 0.904510}$$
$$= \sqrt{1.000002} = 1.000001 = 1,$$

$$|x_2| = \sqrt{(-0.809017)^2 + (0.587785)^2} = \sqrt{0.654510 + 0.345491}$$
$$= \sqrt{1.000001} = 1.000001 = 1,$$

$$|x_3| = \sqrt{(-0.809017)^2 + (-0.587785)^2} = \sqrt{0.654510 + 0.345491}$$
$$= \sqrt{1.000001} = 1.000001 = 1,$$

$$|x_4| = \sqrt{(0.309017)^2 + (-0.951057)^2} = \sqrt{0.095492 + 0.904510}$$
$$= \sqrt{1.000002} = 1.000001 = 1.$$

Bu nedenle, (4.5) denkleminin denge noktası $\bar{x} = s$ hiperbolik olmayan bir noktadır.

4.6 Fark Denklemi (4.6)

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{-1}{x_n(x_{n-1}\,x_{n-2} - x_{n-1} + 1) - 1}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.6}$$

ile verilen (4.6) denklemi ele alınacak ve bu denklemin çözümlerinin dinamik davranışı analiz edilecektir.

Lemma 4.16

$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinin (4.6) denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım.

Bu durumda, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi beş periyotlu (5-periyodik) bir periyodik dizidir; yani

$x_{n+5} = x_n$ tüm $n \geq -1$ için.

İspat.

(4.6) denkleminden başlanarak, yineleme bağıntısı ardışık olarak uygulanır.

$$\begin{aligned}
x_{n+5} &= \frac{-1}{x_{n+4}(x_{n+3}x_{n+2} - x_{n+3} + 1) - 1} \\
&= \frac{-1}{\frac{-1}{x_{n+3}(x_{n+2}x_{n+1} - x_{n+2} + 1) - 1}(x_{n+3}x_{n+2} - x_{n+3} + 1) - 1} \\
&= \frac{-x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+3}x_{n+2} - x_{n+3} + 1}{-x_{n+3}x_{n+2} + x_{n+3} - 1 - x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+3}x_{n+2} - x_{n+3} + 1} \\
&= \frac{-x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+3}x_{n+2} - x_{n+3} + 1}{-x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1}} \\
&= 1 - \frac{x_{n+3}x_{n+2} - x_{n+3} + 1}{x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1}} \\
&= 1 - \frac{\frac{-x_{n+2}}{x_{n+2}(x_{n+1}x_n - x_{n+1} + 1) - 1} + \frac{1}{x_{n+2}(x_{n+1}x_n - x_{n+1} + 1) - 1} + 1}{\frac{-x_{n+2}x_{n+1}}{x_{n+2}(x_{n+1}x_n - x_{n+1} + 1) - 1}} \\
&= 1 - \frac{-x_{n+2} + 1 + x_{n+2}x_{n+1}x_n - x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+2} - 1}{-x_{n+2}x_{n+1}} \\
&= 1 - \frac{+x_{n+2}x_{n+1}x_n - x_{n+2}x_{n+1}}{-x_{n+2}x_{n+1}} \\
&= 1 + x_n - 1 \\
&= x_n\,.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla sonuç elde edilir.

Teorem 4.17

$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinin (4.6) denkleminin bir çözümü olduğunu varsayalım. O hâlde, $n = 1,2,...$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} x_{5n-4} &= \frac{-1}{x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1}, \\ x_{5n-3} &= \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1}{-x_0x_{-1}x_{-2}}, \\ x_{5n-2} &= x_{-2}, \\ x_{5n-1} &= x_{-1}, \\ x_{5n} &= x_0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Burada başlangıç koşulları

$$M_0 = 0\,, \qquad M_1 = 0\,, \qquad M_2 = 1\,, \qquad M_3 = 1,$$

şeklindedir. Ayrıca başlangıç değerleri $(x_{-2}, x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus F_6$ olmak üzere, F_6 kümesi (4.6) denkleminin yasak kümesi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F_6 = \left\{ (x_{-2}, x_{-1}, x_0) \;:\quad x_0x_{-1}x_{-2} = 0 \quad \text{veya} \quad x_{-2} = \frac{x_0x_{-1} - x_0 + 1}{x_0x_{-1}} \right\}.$$

İspat.

(4.6) denkleminden açıkça görülmektedir ki, $n = 0$ için sonuç geçerlidir.

Şimdi $n > 0$ olduğunu ve varsayımımızın $n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

Yani,

$$\begin{aligned} x_{5n-9} &= \frac{-1}{x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1}, \\ x_{5n-8} &= \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1}{-x_0x_{-1}x_{-2}}, \\ x_{5n-7} &= x_{-2}, \\ x_{5n-6} &= x_{-1}, \\ x_{5n-5} &= x_0, \end{aligned}$$

Şimdi, (4.6) denklemi kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} x_{5n-4} &= \frac{-1}{x_{5n-5}(x_{5n-6}x_{5n-7} - x_{5n-6} + 1) - 1} \\ &= \frac{-1}{x_0(x_{-1}x_{-2} - x_{-1} + 1) - 1} \\ &= \frac{-1}{x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1}. \end{aligned}$$

Bundan ve yine (4.6) denkleminden hareketle,

$$x_{5n-3} = \frac{-1}{x_{5n-4}(x_{5n-5}x_{5n-6} - x_{5n-5} + 1) - 1}$$

$$= \frac{-1}{\frac{-1}{x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1}(x_0x_{-1} - x_0 + 1) - 1}$$

$$= \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1}{-x_0x_{-1} + x_0 - 1 - x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1}$$

$$= \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1}{-x_0x_{-1}x_{-2}}.$$

Yine (4.6) denkleminden doğrudan elde edilir ki:

$$x_{5n-2} = \frac{-1}{x_{5n-3}(x_{5n-4}x_{5n-5} - x_{5n-4} + 1) - 1}$$

$$= \frac{-1}{\frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1}{-x_0x_{-1}x_{-2}}\left(\frac{-x_0}{x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1} + \frac{1}{x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1} + 1\right) - 1}$$

$$= \frac{-(-x_0x_{-1}x_{-2})(x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1)}{(-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1)[-x_0 + 1 + x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1 - x_0x_{-1}x_{-2}]}$$

$$= \frac{(-x_0x_{-1}x_{-2})}{[-x_0 + 1 + x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1 - x_0x_{-1}x_{-2}]}$$

$$= \frac{-x_0x_{-1}x_{-2}}{-x_0x_{-1}}$$

$$= x_{-2}.$$

Yine (4.6) denkleminden doğrudan elde edilir ki:

$$x_{5n-1}$$

$$= \frac{-1}{x_{-2}\left(\frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1}{-x_0x_{-1}x_{-2}} \times \frac{-1}{x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1} - \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1}{-x_0x_{-1}x_{-2}} + 1\right) - 1}$$

$$= \frac{-1}{x_{-2}\left(\frac{+1}{-x_0x_{-1}x_{-2}} - \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1}{-x_0x_{-1}x_{-2}} + \frac{-x_0x_{-1}x_{-2}}{-x_0x_{-1}x_{-2}}\right) - 1}$$

$$= \frac{x_0x_{-1}}{+1 + x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0 - 1 - x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1}}$$

$$= \frac{x_0x_{-1}}{x_0}$$

$$= x_{-1}.$$

Benzer şekilde, (4.6) denkleminden aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$x_{5n-5} = \frac{-1}{x_{5n-1}(x_{5n-2}x_{5n-3} - x_{5n-2} + 1) - 1}$$

$$= \frac{-1}{x_{-1}\left(x_{-2} \times \frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1}{-x_0x_{-1}x_{-2}} - x_{-2} + 1\right) - 1}$$

$$= \frac{-1}{x_{-1}\left(\frac{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1 + x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1}}{-x_0x_{-1}}\right) - 1}$$

$$= \frac{x_0}{-x_0x_{-1}x_{-2} + x_0x_{-1} - x_0 + 1 + x_0x_{-1}x_{-2} - x_0x_{-1} + x_0}$$

$$= \frac{x_0}{1}$$

$$= x_0.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.18

(4.6) denklemi tek bir denge noktasına sahiptir $\bar{x} = t$ ve t hiperbolik olmayan bir noktadır.

İspat.

(4.6) denkleminin denge noktası, denge koşulu sağlanarak elde edilir.

$$\bar{x} = \frac{-1}{\bar{x}(\bar{x}\,\bar{x} - \bar{x} + 1) - 1},$$

$$\bar{x} = \frac{-1}{\bar{x}(\bar{x}^2 - \bar{x} + 1) - 1},$$

$$\bar{x} = \frac{-1}{\bar{x}^3 - \bar{x}^2 + \bar{x} - 1},$$

$$\bar{x}^4 - \bar{x}^3 + \bar{x}^2 - \bar{x} = -1.$$

Aşağıdaki dördüncü dereceden denklemi elde ederiz

$$\bar{x}^4 - \bar{x}^3 + \bar{x}^2 - \bar{x} + 1 = 0. \qquad (4.22)$$

Dördüncü dereceden (4.22) denkleminin kökleri

$$x_k = e^{\frac{(\pi+2\pi k)}{5}i} \quad , k = 0,1,2,3,4.$$

$$x_0 = e^{\frac{\pi}{5}i} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = 0.809017 + 0.587785\,i.$$

$$x_1 = e^{\frac{3\pi}{5}i} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = -0.309017 + 0.951057\,i.$$

$x_2 = e^{\pi i} = -1$ (olmakla birlikte, $x = -1$ değeri $x^5 + 1 = 0$ denklemini sağlamadığından kabul edilemez).

$$x_3 = e^{\frac{7\pi}{5}i} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = -0.309017 - 0.951057\, i = \bar{x}_1.$$

$$x_4 = e^{\frac{9\pi}{5}i} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = 0.809017 - 0.587785\, i = \bar{x}_0.$$

Bu durumda,

$$|x_0| = \sqrt{(0.809017)^2 + (0.587785)^2} = \sqrt{0.654510 + 0.345491}$$
$$= \sqrt{1.000001} = 1.000001 = 1,$$
$$|x_1| = \sqrt{(-0.309017)^2 + (0.951057)^2} = \sqrt{0.095492 + 0.904510}$$
$$= \sqrt{1.000002} = 1.000001 = 1,$$
$$|x_3| = \sqrt{(-0.309017)^2 + (-0.951057)^2} = \sqrt{0.095492 + 0.904510}$$
$$= \sqrt{1.000002} = 1.000001 = 1,$$
$$|x_4| = \sqrt{(0.809017)^2 + (-0.587785)^2} = \sqrt{0.654510 + 0.345491}$$
$$= \sqrt{1.000001} = 1.000001 = 1,$$

Bu nedenle, (4.6) denkleminin denge noktası $\bar{x} = t$ hiperbolik olmayan bir noktadır.

5. TARTIŞMA

Bu bölümde incelenen (4.1)– (4.6) numaralı üçüncü mertebeden rasyonel fark denklemlerine ilişkin elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde, söz konusu denklemlerin çözüm davranışlarının literatürde yer alan Fibonacci, Padovan, Tribonacci, Jacobsthal–Padovan ve benzeri özel tam sayı dizileriyle doğrudan ilişkili çalışmaları destekler nitelikte olduğu görülmektedir. Özellikle (4.1)–(4.4) numaralı denklemler için elde edilen bulgular, sistemin başlangıç değerlerine duyarlı bir yapı sergilediğini, belirli başlangıç koşulları altında ise kararlı ya da periyodik çözümler ortaya çıkardığını göstermektedir. Buna karşılık, (4.5) ve (4.6) numaralı denklemler yinelemeli bir yapıya sahip olup, başlangıç değerleri altında periyodik çözümler üretme eğiliminde olduklarını ve bazı özel durumlarda ise denge noktalarının hiperbolik olmayan bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir.

Elde edilen bu sonuçlar, üçüncü mertebeden rasyonel fark denklemlerinin çözüm özelliklerinin yalnızca analitik yöntemlerle değil, aynı zamanda özel tam sayı dizileri ve karakteristik denklemler aracılığıyla da açıklanabileceğini ortaya koymaktadır. Böylece, bu denklemlerin hem dinamik yapıları hem de denge noktalarının davranışları literatürdeki benzer çalışmalarla paralellik göstermekte, ancak aynı zamanda farklı parametre yapıları nedeniyle yeni bir bakış açısı sunmaktadır. Bu bağlamda, çalışmanın söz konusu rasyonel fark denklemlerinin periyodik çözümleri, kararlılık özellikleri ve asimptotik davranışlarına ilişkin literatüre önemli katkılar sunduğu söylenebilir.

Çalışmanın güçlü yönleri arasında, incelenen denklemlerin yüksek mertebeli ve rasyonel yapısına rağmen çözümlerinin belirli özel tam sayı dizileri ile ilişkilendirilerek anlamlı ve yorumlanabilir bir biçimde elde edilmesi yer almaktadır. Ayrıca, denge noktalarının yapısı, kararlılık analizi ve periyodik davranışların ayrıntılı olarak ortaya konması çalışmanın literatürdeki yerini güçlendirmektedir. Bununla birlikte, çalışma bazı sınırlılıklar da içermektedir. Özellikle, çözümlerin başlangıç koşullarına yüksek derecede bağımlı olması ve bazı durumlarda yasaklı kümelerin ortaya çıkması, sistemin tüm başlangıç değerleri için genellenebilir bir yapıya sahip olmadığını göstermektedir. Ayrıca, hiperbolik olmayan denge noktalarının varlığı, bu denklemler için daha ileri seviyede analitik ve sayısal yöntemlerin kullanılmasını gerektirmektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada (4.1)–(4.6) numaralı üçüncü mertebeden rasyonel fark denklemleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) denklemleri için genel terimler elde edilmiş, bu denklemlere ait denge noktaları belirlenmiş ve söz konusu denge noktalarının yerel ve küresel kararlılıkları kapsamlı biçimde analiz edilmiştir. Bunun yanında (4.5) ve (4.6) numaralı denklemlerin çözümlerinin beş periyotlu diziler olduğu gösterilmiş ve her iki denklem için de $x_{n+5} = x_n$ eşitliğinin tüm $n \geq -1$ için sağlandığı ispatlanmıştır.

Çalışmada elde edilen dördüncü dereceden karakteristik denklemlerin her birinin dört köke sahip olduğu belirlenmiştir. Denklem (4.1) için karakteristik denklem (4.8), (4.2) için (4.11), (4.3) için (4.14) ve (4.4) için (4.17) olarak elde edilmiştir. Bu köklerin bazıları itici (püskürtücü), bazıları ise yerel veya küresel asimptotik kararlı denge noktalarına karşılık gelmektedir. Benzer şekilde negatif denge noktalarının da bazıları kararlı, bazıları itici karakter göstermektedir. Denklem (4.5) için elde edilen (4.20) ve denklem (4.6) için elde edilen (4.22) numaralı karakteristik denklemler ise hiperbolik olmayan tek bir denge noktasının varlığını ortaya koymaktadır. Ayrıca bu iki denklem için çözümlerin 5-periyodik olduğu ve (4.19) ile (4.21) eşitliklerinin sağlandığı gösterilmiştir.

Elde edilen sonuçlar genel olarak, incelenen fark denklemlerinin Tetranacci dizisi ile yakından ilişkili olduğunu ve karakteristik denklemlerin köklerinin Tetranacci sabiti ile bağlantılı bulunduğunu ortaya koymaktadır. Ayrıca denge noktalarının kararlılık davranışlarının köklerin büyüklükleri ile doğrudan ilişkili olduğu belirlenmiştir. Bu yönüyle çalışma, üçüncü mertebeden rasyonel fark denklemlerinin dinamik yapılarının özel tam sayı dizileri üzerinden ifade edilebilir olduğunu göstermesi bakımından literatüre önemli bir katkı sunmaktadır.

Bu bulgular doğrultusunda gelecekte yapılacak çalışmalar için aşağıdaki öneriler sunulabilir:

- Benzer yöntemler kullanılarak daha yüksek mertebeden rasyonel fark denklemleri incelenebilir.
- Tetranacci dizisi yerine Catalan, Pierre ve Adrien gibi diğer özel sayı dizileriyle ilişkili fark denklemleri araştırılabilir.
- Hiperbolik olmayan denge noktalarının davranışlarını daha ayrıntılı incelemek amacıyla nümerik ve grafiksel simülasyonlar gerçekleştirilebilir.
- Elde edilen sonuçlar kaotik davranış, bifürkasyon analizi ve ayrık dinamik sistemler kapsamında genişletilebilir.
- Aynı denklemler için başlangıç değerlerine duyarlılık analizi yapılabilir ve sonuçların uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik modellerine uyarlanması sağlanabilir.

Sonuç olarak, bu çalışmada incelenen (4.1)–(4.6) numaralı denklemlerden elde edilen çözüm yapılarının literatürde yer alan Fibonacci, Padovan, Tribonacci ve Jacobsthal–Padovan gibi özel sayı dizileriyle ilişkili çalışmalarla uyumlu olduğu ve aynı zamanda literatüre yeni bir bakış açısı kazandırdığı görülmektedir. Gelecekte bu denklemlerin daha genel parametreler altında incelenmesi ve daha geniş sınıflardaki fark denklemlerine uygulanması, konunun daha kapsamlı anlaşılmasına önemli katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Elaydi, S. (2005) An Introduction to Difference Equations (3rd Edition). *Springer-Verlag,* New York.

[2] Kelley, W. G. and Peterson, A. C. (1991) Difference Equations. *Academic Press*, New York.

[3] Agarwal, R. P. (2000) Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications (2nd Edition). *Marcel Dekker Inc*., USA.

[4] Kulenovi´c, M. R. S. and Ladas, G. (2001) Dynamics of Second Order Rational Difference Equations*. Chapman & Hall/CRC*, Boca Raton, London.

[5] Mickens, R. E. (1990) Difference Equations: Theory and Applications*, CRC Press,* USA.

[6] Murray, J. D. (2002) Mathematical Biology*, Springer*, London.

[7] Braun, M. (1993**)** Differential Equations and Their Applications, *Springer*, germane.

[8] Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. *Vol. 5 John Wiley & Sons*, New York, USA.

[9] Devlin, K. (2011) The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution. *Walker & Company,* USA.

[10] Katz, V. J. (1998) A History of Mathematics: An Introduction*. Addison-Wesley*, USA.

[11] Dunlap, R. (1997) The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific*, Singapore**.**

[12] Euler, L. (1755) Institutiones Calculi Differentialis*, Akademie der Wissenschaften,* Russia/Switzerland**.**

[13] Babbage, C. (1864) Passages from the Life of a Philosopher, *Longman,* London.

[14] Laplace, P. S. (1812) Théorie Analytique des Probabilités*, Courcier*, France**.**

[15] Casorati, F. (1868) Teorica delle Equazioni Lineari*, Giornale di Matematiche*, Italy.

[16] Lucas, E. (1876) Théorie des Nombres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, France**.**

[17] Hilbert, D. (1891) Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, Mathematische Annalen*, Germany**.**

[18] Weierstrass, K. (1872) Über continuirliche Functionen ohne differenzierbare Eigenschaften*, Mathematische Werke*, Germany**.**

[19] Koch, H. von. (1904) Sur une courbe continue sans tangente*, Arkiv för Matematik*, Swedish.

[20] Runge, C., Kutta, M. (1901) Über numerische Lösung von Differentialgleichungen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Germany**.**

[21] Tollu, D. T. , Yazlık, Y. and Taşkara, N. (2013) On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers*. Advances in Difference Equations,* 174, USA.

[22] Halim, Y. and Rabago, J.F.T. (2017) On the Some Solvable Systems of Difference Equations with Solutions Associated to Fibonacci Numbers. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 5(1): 166-178.

[23] Yazlık, Y. , Tollu, D. T. and Taşkara, N. (2013) On the solutions of difference equation systems with Padovan numbers, Applications of Mathematics*,* 12(1), 15-20, Prague, Czech Republic (Czechia).

[24] Okumuş, İ. and Soykan, Y. (2019) On the Solutions of Four Rational Difference Equations Associated to Tribonacci Numbers, *preprints.org,* doi:10.20944/preprints 201906.0266.v1.

[25] Göcen, M. (2022) The Exact Solutions of Some Difference Equations Associated With Adjusted Jacobsthal-Padovan Numbers. *Kırklareli University Journal of Engineering and Science* 8-1 (2022) 1-14, Turkey.

[26] Büyük, H. and Taşkara, N. (2022) On the solutions of three-dimensional difference equation systems via pell numbers. *European Journal of Science and Technology.;*34(Special Issue):433-440, Turkey.

[27] Halim, Y. and Rabago, J. F. T. (2018*)* On the solutions of a second-order difference equation in terms of generalized Padovan sequences, *Math. Slovaca,* 68(3), 625-638, Slovakia.

[28] Stevic, S. (2014) Representation of solutions of bilinear difference equations in terms of generalized Fibonacci sequences, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.,* 67(1), 15 pages, Hungary.

[29] Halim, Y. and Bayram, M. (2016) On the solutions of a higher-order difference equation in terms of generalized Fibonacci sequences, *Math. Methods Appl. Sci.,* 39(1) 2974-2982, UK.

[30] Tollu, D. T. ,Yazlık, Y. and Taskara, N. (2014) On fourteen solvable systems of difference equations, *Appl. Math. & Comp.,* 233(1), 310-319.

[31] Bacani, J.B. and Rabago, J. F. T. (2015) On two nonlinear difference equations. *Dynamics of continuous, Discrete Impul. Sys*., (Serias A) to appear.

[32] Stevic, S. , Iricanin, B. , Kosmala, W. and Smarda, Z. (2018) Representation of solutions of a solvable nonlinear difference equation of second order, *Elect. J. Qualitative Theory of Dif. Equ.,* 95 ,1-18, Hungary.

[33] Elsayed, E. M. (2015) On a system of two nonlinear difference equations of order two, *Proc. Jangeon Math. Soc.,* 18(1), 353-368, South Korea.

[34] Elsayed, E. M. and Ibrahim, T. F. (2015) Periodicity and solutions for some systems of nonlinear rational difference equations, Hacet. J. Math. Stat., 44(1), 1361-1390, Turkey.

[35] Elsayed, E. M. (2014) Solution for systems of difference equations of rational form of order two, *Comp. Appl. Math.,* 33(1), 751-765.

[36] Horadam, A. F. (1965) Basic Properties of Certain Generalized Sequence of Numbers. *Fibonacci Quarterly*, 3: 161-176, USA.

[37] Vajda, S. (1989) *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications*, Ellis Horwood, UK.

[38] Clark, Z. & Lutz, D. (2010) Tribonacci and Padovan Sequences in Nonlinear Recurrences, *Journal of Integer Sequences*, Canada.

[39] Sedaghat, H. (2003) *Nonlinear Difference Equations: Theory with Applications to Social and Natural Sciences.* Springer, USA.

[40] Kulback, B. & Ladas, G. (2017*) Global Behavior of Rational Difference Equations in the Plane,* World Scientific , Singapore.

[41] Halim, Y. , Touafek, N. and Elsayed, E. M. (2014) Closed form solution of some systems of rational difference equations in terms of Fibonacci numbers, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal.,* 21(6), 473-486, Canada.

[42] Halim, Y. (2015) Global character of systems of rational difference equations, *Electron. J. Math. Analysis Appl.,* 3(1) , 204-214, USA.

[43] Halim, Y. (2016) A system of difference equations with solutions associated to Fibonacci numbers, *Int. J. Difference Equ.,* 11, 65–77, India.

[44] Tollu, D. T. Yazlik, Y. and Taskara, N. (2014) The solutions of four Riccati difference equations associated with Fibonacci numbers, *Balkan J. Math.,* 2(1), 163-172, Balkan.

[45] Touafek, N. (2014) On some fractional systems of difference equations, *Iran. J. Math. Sci. Inform.*, 9(2), 303-305.

[46] Touafek, N. and Halim, Y. (2011) On max type difference equations: expressions of solutions, *Int. J. Appl. Nonlinear Sci.,* 11(4), 396-402.

[47] Touafek, N. and Elsayed, E. M. (2012) On the periodicity of some systems of nonlinear difference equations, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum., Nouv. Ser.,* 55(1), 217-224, Romania.

[48] Deveci, O. and Shannon, A. G. (2017) Pell-Padovan-Circulant Sequences and Their Applications*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics,* 23(3):100-114, Bulgaria.

[49] Devaney, R. L. (1989) *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison-Wesley, USA.

[50] Bicknell, N. (1975) A primer on the Pell sequence and related sequence, *Fibonacci Quarterly,* 13(4): 345-349, USA.

[51] Ercolano, J. (1979) Matrix generator of Pell sequence, *Fibonacci Quarterly*,17(1), 71-77, USA.

[52] Kiliç, E. and Taşçi, D. (2006) The Generalized Binet Formula, Representation and Sums of the Generalized Order-k Pell Numbers, *Taiwanese Journal of Mathematics,* 10(6): 1661-1670, Taiwan.

[53] Melham, R. (1999) Sums Involving Fibonacci and Pell Numbers, *Portugaliae Mathematica,* 56(3): 309-317, Portugal.

[54] Soykan, Y. (2019) A Study of Generalized Fourth-Order Pell Sequences. *Journal of Scientific Research & Reports,* 25(1): 1-18, UK.

[55] Soykan, Y. (2019) Properties of Generalized Fifth-Order Pell Numbers. *Asian Research Journal of Mathematics,* 15(3): 1-18, UK.

[56] Dasdemir, A. (2011) On the Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Numbers By Matrix Method, *Applied Mathematical Sciences,* 5(64): 3173-3181, Bulgaria.

[57] Soykan, Y. (2020) On Generalized Narayana Numbers. *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics* 7(3): 43-56, India.

[58] Soykan, Y. (2020) On Generalized Sixth-Order Pell Sequences. *Journal of Scientific Perspectives,* 4(1): 49-70, Turkey.

[59] Yağmur, T. (2019) New Approach to Pell and Pell-Lucas Sequences, *Kyung-pook Mathematics Journal,* 59: 23-34, South Korea.

[60] Camouzis E and Ladas G (2007) Dynamics of Third-Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures. Vol. 5 *Chapman & Hall/CRC,* Boca Raton, Fla, USA.

[61] Lakshmikantham, V. ,Trigiante, D. (1988) Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications. *Academic Press,* USA.

[62] Hoggatt, V. E. (1969) *Fibonacci and Lucas Numbers*. Houghton-Mifflin**,** USA**.**

[63] Graham, R. L. , Knuth, D. E. ,Patashnik, O. (1994) *Concrete Mathematics*. Addison Wesley, USA**.**

[64] Feinberg, M. (1963) Fibonacci–Tribonacci Numbers and Generalizations. *The Fibonacci Quarterly*, USA**.**

[65] Spickerman, W. R. (1982) Binet's Formula for the Tribonacci Sequence. *The Fibonacci Quarterly*, USA**.**

[66] Honsberger, R. (1985) *Mathematical Gems II*. Mathematical Association of America, USA**.**

[67] Kýlýç, E., & Taşcı, D. (2006) On the Generalized Tribonacci Numbers. *Chaos, Solitons & Fractals*, UK**.**

[68] Howard, F. T., & Saidak, F. (2011) The Generalized Tribonacci Numbers and Associated Binet Formulas. *The Fibonacci Quarterly*, USA**.**

[69] Catarino, P. (2018) Some Properties of Generalized Tribonacci Numbers. *Journal of Mathematical and Computational Science*, Portugal**.**

[70] Hoggatt, V. E., & Lind, D. A. (1974) The Tetranacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, USA**.**

[71] Tsumura, H. (2009) A Note on Tetranacci Numbers. *Bulletin of the Mathematical Society of Japan*, Japan**.**

[72] Falcon, S., & Plaza, A. (2007) On the Tetranacci Sequence and Generalizations. *Chaos, Solitons & Fractals*, UK**.**

[73] Pethe, S. (1988) On the Solutions of Quadratic and Quartic Recurrence Relations. *Fibonacci Quarterly*, USA**.**

[74] Stewart, I., (1996) Mathematical Recreations: Tales of a Neglected Number, *Scientific American*, Vol. 274, USA**.**

[75] Koshy, T. (2014) *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications,* Springer, New York.

[76] McCarty, C. P. (1981) A formula for Tribonacci numbers,*The Fibonacci Quarterly*, 19 (5): 391-393, USA**.**

[77] Shannon, A. G. and Horadam, A. F. (1972) Some Properties of Third-Order Recurrence Relations. *The Fibonacci Quarterly*, 10 (2): 135-145, USA**.**

[78] Bacani, J. B. and Rabago, J. F. T. (2015) On Generalized Fibonacci Numbers. *Applied Mathematics Sciences,* 9 (25): 3611-3622, Bulgaria.

[79] Trojovsky, P. (2016) On Some Combinations of terms of a Recurrence Sequence. *Chaos, Solitons and Fractals,* 82: 34-37, UK.

[80] Soykan, Y. (2019) Simson Identity of Generalized m-step Fibonacci Numbers. arXiv preprint, arXiv:1903.01313.

[81] Soykan, Y. , Okumuş, I. and Taşdemir, E. (2019) On Generalized Tribonacci Sedenions. arXiv preprint, arXiv:1901.05312.

[82] Bruce, I. (1984) A Modified Tribonacci Sequence.*The Fibonacci Quarterly*, 22, 3, USA**.**

[83] Soykan, Y. (2021) On Generalized Padovan Numbers, *MathLAB Journal,* DOI 10.20944/preprints10.0101.v1.

[84] Yalavigi, C.C. (1972) *Properties of Tribonacci Numbers*.*The Fibonacci Quarterly*, 10(3), 231–246. USA**.**

[85] Catalani, M. (2002) Identities for Tribonacci Numbers*,* arXiv preprint, arXiv:math/0209179, Cornell University Library, USA.

[86] Choi, E. (2013) Modular Tribonacci Numbers by Matrix Method*. Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series B: Pure and Applied Mathematics*, 20(3), 207–221, South Korea.

[87] Elia, M. (2001) Derived Sequences, the Tribonacci Recurrence and Cubic Forms*. The Fibonacci Quarterly*, 39(2), 107–115, USA.

[88] Er, M.C. (1984) Some Properties of Pell and Pell–Lucas Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 22(3), 197–204, USA.

[89] Lin, P.Y. (1988) *De Moivre-Type Identities for the Tribonacci Numbers. The Fibonacci Quarterly*, 26(2), 131–134, USA.

[90] Pethe, S. (1988) On the Solutions of Quadratic and Quartic Recurrence Relations. *The Fibonacci Quarterly*, 26(2), USA.

[91] Scott, A., Delaney, T. and Hoggatt, V. (1977) *The Tribonacci Sequence. The Fibonacci Quarterly*, 15(3), 193–200, USA.

[92] Shannon, A. (1977) *A Note on Generalized Fibonacci Sequences***.** *The Fibonacci Quarterly***, 15(3), 213–218, USA.**

[93] Howard, F. T. and Saidak, F. (2010) Zhou's Theory of Constructing Identities. *Congressus Numerantium*, 200**,** 225–237, Canada.

[94] Hathiwala, G. S. and Shah, D. V. (2017) Binet–Type Formula for The Sequence of Tetranacci Numbers by Alternate Methods, *Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences* 6 (1), 37–48, India.

[95] Zaveri, M. N. and Patel, J. K. (2016) Binet's Formula for the Tetranacci Sequence, *International Journal of Science and Research (IJSR),* 5 (12), 1911-1914, India.

[96] Dresden, G.P. and Du, Z. (2014) A Simplified Binet Formula for k-Generalized Fibonacci Numbers, *Journal of Integer Sequences*, 17, art. 14.4.7,9pp, Canada.

[97] Faisant, A. (2019) On The Padovan Sequence, arXiv:1905.07702v1, USA.

[98] Deveci, O. (2018) The Padovan-Circulant Sequences and Their Applications, *Math. Reports,* 20(70): 401-416, Romania.

[99] Deveci, O. and Karaduman, E. (2017) On the Padovan p-numbers, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(4): 579-592, Turkey.

[100] Dışkaya, O. and Menken, Hamza (2019) On the (s, t)-Padovan and (s,t)-Perrin Quaternions, *Journal of Advanced Mathematical Studies,* 12(2): 186-192, Romania.

[101] Soykan, Y. (2020) A Study On Generalized (r; s; t)- Numbers. *Math LAB Journal,* 7, 101-129, Turkey.

[102] Büyük, H. and Taşkara, N. (2022) On The Solutions of Three-Dimensional Difference Equation Systems Via Pell Numbers. *European Journal of Science and Technology,* Special Issue 34: 433-440, Turkey.

[103] Deveci, Ö. (2019) The Jacobsthal-Padovan p-sequences and their applications, *Proc. Rom. Acad. Ser. A,* 20(3), 215-224, Romania.

[104] Horadam, A. F. (1971) Pell identities, *Fibonacci Quarterly*, 9(3): 245-263, USA.

[105] Soykan, Y. (2020) On Generalized Sixth-Order Pell Sequences. *Journal of Scientific Perspectives,* 4(1): 49-70, Turkey.

[106] Soykan, Y. (2019) On Generalized Third-Order Pell Numbers. *Asian Journal of Advanced Research and Reports,* 6(1): 1-18, India.

[107] Deveci, Ö. (2015) The Pell-Padovan sequences and the Jacobsthal-Padovan sequences in finite groups, *Util. Math.,* 98, 257-270, Canada.

[108] Soykan, Y. (2020) A Study on Generalized Jacobsthal-Padovan Numbers, *Earthline Journal of Mathematical Seciences,* 4(2), 227-251, India.

İNTİHAL RAPORU İLK SAYFASI

ORİJİNALLİK RAPORU

%12	%9	%12	%7
BENZERLİK ENDEKSİ	İNTERNET KAYNAKLARI	YAYINLAR	ÖĞRENCİ ÖDEVLERİ

BİRİNCİL KAYNAKLAR

1	slidelegend.com İnternet Kaynağı	%3
2	"Fibonacci and Lucas Numbers With Applications", Wiley, 2018 Yayın	%2
3	ntp.niehs.nih.gov İnternet Kaynağı	%1
4	honeynet.hackers.nl İnternet Kaynağı	%1
5	Takicak, Semiha Betül. "Osmanlılar'da analitik geometri: Hendese-i halliyye ve Hendese-i tahliliyye", Ankara Universitesi (Turkey), 2024 Yayın	%1
6	archive.org İnternet Kaynağı	%1
7	Submitted to Universidade de Fortaleza -- Fundação Edson Queiroz / Foundation Edson Queiroz Öğrenci Ödevi	<%1
8	Submitted to Bülent Ecevit Üniversitesi Öğrenci Ödevi	<%1
9	Yasagan, Musa. "Fibonacci Ve Lucas sayilari Ve Binomial ozellikleri", Necmettin Erbakan University (Turkey), 2021 Yayın	<%1
10	Steiner, Erich. "The Chemistry Maths Book", The Chemistry Maths Book, 2008 Yayın	<%1

ETİK KURUL İZİN YAZISI

Uyarı: Canlı denekler üzerinde yapılan tüm araştırmalar için Etik Kurul Belgesi alınması zorunludur.

☐ **Etik Kurul izni gerekmektedir.**

☒ **Etik Kurul izni gerekmemektedir.**

Hanaa MASALATI
(İmza)

KURUM İZNİ YAZILARI

Uyarı: Canlı ve cansız deneklerle yapılan tüm çalışmalar için kurum izin belgelerinin eklenmesi zorunludur. Gizlilik ve mahremiyet içeren durumlarda kurum adı kapatılmalıdır.

☐ **Kurum izni gerekmektedir.**

☒ **Kurum izni gerekmemektedir.**

Hanaa MASALATI
(İmza)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	❒ T.C. ❒ Diğer:
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	
Fakülte	
Bölümü	
Mezuniyet Yılı	
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	

Makale ve Bildiriler